**数学与统计学院**

1.【真题】对于数列$\{u_n\}$，若存在常数$M>0$，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，恒有$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1\leqslant M|$则称数列$\{u_n\}$为$B-$数列

（1）首项为 1，公比为$q(|q|<1)$的等比数列是否为$B-$数列？请说明理由；请以其中一组的一个论断条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题判断所给命题的真假，并证明你的结论：

（2）设$S_n$是数列$\{x_n\}$的前$n$项和，给出下列两组论断：

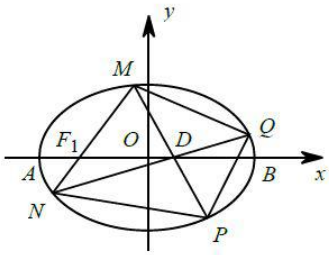
A 组：①数列$\{x_n\}$是$B-$数列，②数列$\{x_n\}$不是$B-$数列

B 组：①数列$\{S_n\}$是$B-$数列，②数列$\{S_n\}$不是$B-$数列

请以其中一组中的一个论断为条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题。判断所给命题的真假，并证明你的结论：

（3）若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是$B-$数列，证明：数列$\{a_nb_n\}$也是$B-$数列。

2.【真题】如图，在平面直角坐标系$xOy$中，已知$F_1$、$F_2$分别是椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$A$，$B$分别是椭圆$E$的左、右顶点，$D(1,0)$为线段$OF_2$的中点，且$\overrightarrow{AF_2}+5\overrightarrow{BF_2}=\vec{0}$.




（1）求椭圆$E$的方程：

（2）若$M$为椭圆且上的动点（异于点$A$、$B$），连接$MF_1$并延长交椭圆$E$于点$N$，连接$MD$、$ND$并分别延长交椭圆$E$于点$P$，$Q$，连接$PQ$．设直线$MN$、$PQ$的斜率存在且分别为$k_1$、$k_2$，试问是否存在常数$\lambda$，使得$k_1+\lambda k_2=0$恒成立？若存在，求出$\lambda$的值；若不存在，说明理由

3.【真题】已知函$f(x)=\ln x-ax+\dfrac{a}{x}$，其中$a$为常数.

（1）若$f(x)$的图象在$x=1$处的切线经过点$(3,4)$，求$a$的值；

（2）若$0<a<1$，求证：$f\left(\dfrac{a^2}{2}\right)>0$；

（3）当函数$f(x)$存在三个不同的零点时，求$a$的取值范围.

4.【真题】设$x$、$y$、$z$为非负实数，满足$xy+yz+zx=1$，证明$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{5}{2}$.

5.【真题】设$f(x)$是定义在区间$(1,+\infty)$上的函数，其导函数为$f'(x)$．如果存在实数$a$和函数$h(x)$，其中$h(x)$对任意的$x\in(1,+\infty)$都有$h(x)>0$，使得$f'(x)=h(x)(x^2-ax+1)$，则称函数$f(x)$具有性质$P(a)$.

（1）设函数$f(x)=\ln x+\frac{b+2}{x+1}(x>1)$，其中$b$为实数

①求证：函数$f(x)$具有性质$P(a)$．②求函数$f(x)$的单调区间。

（2）已知函数$g(x)$具有性质$P(2)$，给定$x_1$，$x_2\in(1,+\infty)$，$x_1<x_2$设$m$为实数，$\alpha=mx_1+(1-m)x_2$，$\beta=(1-m)x_1+mx_2$，且$\alpha>1$，$\beta>1$．若$|g(\alpha)-g(\beta)|<|g(x_1)-g(x_2)|$，求$m$的取值范围。

# 2018 年武汉大学自主招生数学试题解析

1.对于数列$\{u_n\}$，若存在常数 $M>0$，对任意的 $n\in N^*$，恒有

$$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\leqslant M,$$

则称数列$\{u_n\}$为 $B$—数列.

(1)首项为 1，公比为 $q(|q|<1)$的等比数列是否为 $B$—数列?请说明理由；

(2)设 $S_n$ 是数列$\{x_n\}$的前 $n$ 项和，给出下列两组判断：

$A$ 组：①数列$\{x_n\}$是 $B$—数列，②数列$\{x_n\}$不是 $B$—数列；

$B$ 组：③数列$\{S_n\}$是 $B$—数列，④数列$\{S_n\}$不是 $B$—数列.

请以其中一组中的论断为条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题，判断所给出的命题的真假，并证明你的结论；

(3)若数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都是 $B$—数列，证明：数列$\{a_nb_n\}$也是 $B$—数列.

【解析】(1)由题意，$u_n=q^{n-1}$，$|u_{i+1}-u_i|=|q|^{i-1}(1-q)$，

于是：

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\\&=(1-q)\cdot\frac{1-|q|^n}{1-|q|}\\&\leqslant 1-|q|^n\\&\leqslant 1,\end{aligned}$$

由定义知，数列为 $B$—数列.

(2)命题 1：数列$\{x_n\}$是 $B$—数列，数列$\{S_n\}$是 $B$—数列.此命题是假命题.

取 $x_n=1(n\in N^*)$，则数列$\{x_n\}$是 $B$—数列；而 $S_n=n$，

$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\cdots+|S_2-S_1|=n$，

由于 $n$ 的任意性，显然$\{S_n\}$不是 $B$—数列.

命题 2：若数列$\{S_n\}$是 $B$—数列，则数列$\{x_n\}$是 $B$—数列.此命题是真命题.

证明：$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\cdots+|S_2-S_1|=|x_{n+1}|+|x_n|+\cdots+|x_2|\leqslant M$，

又因为

$$\begin{aligned}&|x_{n+1}-x_n|+|x_n-x_{n-1}|+\cdots+|x_2-x_1|\\&\leqslant|x_{n+1}|+2|x_n|+2|x_{n-1}|+\cdots+2|x_2|+|x_1|\\&\leqslant 2M+|x_1|,\end{aligned}$$

所以：数列$\{x_n\}$为 $B$—数列.

(3)若数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均为 $B$—数列，则存在正数 $M_1$，$M_2$，对于任意的 $n\in N^*$，有

$$|a_{n+1}-a_n|+\cdots+|a_2-a_1|\leqslant M_1,$$

$$|b_{n+1}-b_n|+\cdots+|b_2-b_1|\leqslant M_2,$$

注意到：

$$|a_n|=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1|$$
$$\leqslant|a_{n+1}-a_n|+\cdots+|a_2-a_1|+a_1\leqslant M_1+a_1;$$

同理：$|b_n|\leqslant M_2+b_1$；

令 $k_1=M_1+a_1$，$k_2=M_2+b_1$，

则$|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|=|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_{n+1}+a_nb_{n+1}-a_nb_n|$

$$\leqslant|b_{n+1}||a_{n+1}-a_n|+|a_n||b_{n+1}-b_n|$$
$$\leqslant k_2|a_{n+1}-a_n|+k_1|b_{n+1}-b_n|;$$

从而：

$|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|+|a_nb_n-a_{n-1}b_{n-1}|+\cdots+|a_2b_2-a_1b_1|$

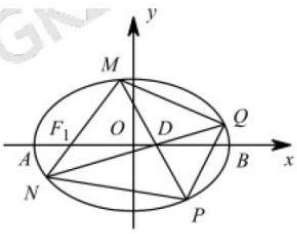
$$\leqslant k_2(|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\cdots+|a_2-a_1|)+k_1(|b_{n+1}-b_n|+|b_n-b_{n-1}|+\cdots+|b_2-b_1|)$$
$$\leqslant k_2M_1+k_1M_2.$$

所以：数列$\{a_nb_n\}$是 $B$—数列.

2.如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知 $F_1$、$F_2$ 分别是椭圆 $E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$A$、$B$ 分别是椭圆 $E$ 的左、右顶点，$D(1，0)$为线段 $OF_2$ 的中点，且 $\overrightarrow{AF_2}+5\overrightarrow{BF_2}=0$.

(1)求椭圆 $E$ 的方程；

(2)若 $M$ 为椭圆上的动点(异于点 $A$、$B$)，连接 $MF_1$ 并延长交椭圆 $E$ 于点 $N$，连接 $MD$、$ND$ 并分别延长交椭圆 $E$ 于点 $P$、$Q$，连接 $PQ$.设直线 $MN$、$PQ$ 的斜率存在且分别为 $k_1$、$k_2$，试问是否存在常数 $\lambda$，使得 $k_1+\lambda k_2=0$ 恒成立?若存在，求出 $\lambda$ 的值；若不存在，说明理由.




【解析】(1)易知 $c=2$，因为 $\overrightarrow{AF_2}+5\overrightarrow{BF_2}$，即 $a+c=5(a-c)$，解得：$a=3$，所以：$b^2=a^2-c^2=5$.

所以：椭圆 $E$ 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

(2)设直线 $MN$ 的方程为 $x=ty-2$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

所以：直线 $MP$ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，联立椭圆方程和直线方程可得：

$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\\ y_1x-(x_1-1)y-y_1=0,\end{cases}$ 消去 $y$ 得：$(5-x_1)x^2-(9-x_1^2)x+9x_1-5x_1^2=0$，

由根与系数的关系可得：$x_P=\frac{9-5x_1}{5-x_1}$，

于是 $P\left(\frac{9-5x_1}{5-x_1}, \frac{4y_1}{5-x_1}\right)$，同理可得：$Q\left(\frac{9-5x_2}{5-x_2}, \frac{4y_2}{5-x_2}\right)$，

所以：$k_2=-\frac{28}{25t}=-\frac{28}{25}k_1$，即：$k_1+\frac{25}{28}k_2=0$

所以：存在 $\lambda=\frac{25}{28}$满足题意.

3.已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\frac{a}{x}$，其中 $a$ 为常数.

(1)若 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线经过点(3，4)，求 $a$ 的值；

(2)若 $0<a<1$，求证：$f\left(\frac{a^2}{2}\right)>0$；

(3)当函数 $f(x)$存在三个不同的零点时，求 $a$ 的取值范围.

【解析】(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{a}{x^2}$，所以 $f'(1)=1-2a$，

因为切点坐标为(1，0)，所以 $k=2$，所以：$1-2a=2$，解得：$a=-\frac{1}{2}$.

(2)证明：原题即证 $2\ln a-\ln 2-\frac{a^3}{2}+\frac{2}{a}>0$ 对任意的 $a\in(0，1)$成立.

令 $g(a)=2\ln a-\ln 2-\frac{a^3}{2}+\frac{2}{a}$，所以：$g'(a)=\frac{2}{a}-\frac{3a^2}{2}-\frac{2}{a^2}=\frac{4a-3a^4-4}{2a^2}$，

令 $h(a)=4a-3a^4-4$，则 $h'(a)=4-12a^3$，则 $h(a)$在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$单调递增，在 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1\right)$上单调递减，而

$h(a)_{\max}=h\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\sqrt[3]{9}-4<0$，

所以：$g'(a)<0$，所以：$g(a)$在(0，1)上单调递减，

所以：$g(a)>g(1)=-\ln 2+\frac{3}{2}>0$.

(3)显然 $x=1$ 是函数的一个零点，则只需 $a=\frac{x\ln x}{x^2-1}$有两个不等的实数解即可.

令 $g(x)=\frac{x\ln x}{x^2-1}$，$x>0$ 且 $x\neq 1$.

则 $g'(x)=\frac{-(x^2+1)\left(\ln x-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{(x^2-1)^2}$，令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{x^2-1}{x^2+1}$，

则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}>0$，

于是 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，同时注意到 $\varphi(1)=0$.

所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减.

因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$,

又因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{x-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1+x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0$,

所以：$0<a<\frac{1}{2}$.

4.设非负实数 $x$、$y$、$z$ 满足 $xy+yz+zx=1$，求证：$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{5}{2}$.

【解析】证明：由于对称性，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，设 $y+z=a$，则 $ax=1-yz\leqslant1$，所以：$x\leqslant\frac{1}{a}$,

令 $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{2x+a}{x^2+1}+\frac{1}{a}=f(x)$,

所以：$f'(x)=-\frac{2}{(x^2+1)^2}(x^2+ax-1)=\frac{2(yz-x^2)}{(x^2+1)^2}<0$，即 $f(x)$为单调递减函数，

所以：$f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2a+a^3}{1+a^2}+\frac{1}{a}$,

因为 $\frac{2a+a^3}{1+a^2}+\frac{1}{a}-\frac{5}{2}=\frac{(a-1)^2(2a^2-a+2)}{2a(a^2+1)}\geqslant0$,

当且仅当 $a=1$ 时等号成立，此时 $x=1$，则 $y+z+yz=1$，且 $yz=0$,

所以等号成立的条件为 $x=1$，$y=1$，$z=0$(或者其轮换).

变式题：设非负实数 $x$、$y$、$z$ 满足 $xy+yz+zx=1$，求证：$\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}+2$.

5.设函数 $f(x)$是定义在区间$(1,+\infty)$上的函数，其导函数为 $f'(x)$，如果存在实数 $a$ 和函数 $h(x)$，其中，$h(x)$对任意的 $x\in(1,+\infty)$都有 $h(x)>0$，使得 $f'(x)=h(x)(x^2-ax++1)$，则称函数 $f(x)$具有性质 $P(a)$.

(1)设函数 $f(x)=\ln x+\frac{b+2}{x+1}(x>1)$，其中 $b$ 为常数；

①求证函数 $f(x)$具有性质 $P(a)$；

②求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)已知函数 $g(x)$具有性质 $P(2)$，给定 $x_1$，$x_2\in(1,+\infty)$，$x_1<x_2$，$\alpha=mx_1+(1-m)x_2$，$\beta=mx_2+(1-m)x_1$，且 $\alpha>1$，$\beta>1$，若$|g(\alpha)-g(\beta)|<|g(x_1)-g(x_2)|$，求 $m$ 的取值范围.

【解析】(1)①因为 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x(x+1)^2}$，显然对 $x^2-bx+1=t(x)$，存在 $b$ 使得对 $x\in(1,+\infty)$，$t(x)>0$ 恒

成立，$h(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}>0$ 恒成立.

②由①知，$f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x(x+1)^2}$，当 $b\leqslant 2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 单调递增，

当 $b>2$ 时，$f'(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上有一个零点 $x_0=\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$，

函数 $f(x)$ 在 $\left(1，\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}，+\infty\right)$ 单调递增.

综上所述，当 $b\le 2$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递增；

当 $b>2$ 时，$f(x)$ 在 $(1,\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2})$ 上递减；$f(x)$ 在 $[\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2},+\infty)$ 上递增。

(2)（方法一）由题意，得：$g'(x)=h(x)(x^2-2x+1)=h(x)(x-1)^2$

又 $h(x)$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $h(x)>0$，

所以对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增。

又 $\alpha+\beta=x_1+x_2,\alpha-\beta=(2m-1)(x_1-x_2)$。

当 $m>\frac{1}{2},m\neq 1$ 时，$\alpha<\beta$，且 $\alpha-x_1=(m-1)x_1+(1-m)x_2,\beta-x_2=(1-m)x_1+(m-1)x_2$，

$\therefore(\alpha-x_1)(\beta-x_2)=-(m-1)^2(x_1-x_2)^2<0$，$\therefore\alpha<x_1<x_2<\beta$ 或 $x_1<\alpha<\beta<x_2$，

若 $\alpha<x_1<x_2<\beta$，则 $f(\alpha)<f(x_1)<f(x_2)<f(\beta)$，

$\therefore|g(\alpha)-g(\beta)|>g(x_1)-g(x_2)|$，不合题意。　　$\therefore x_1<\alpha<\beta<x_2$，

即 $\begin{cases}x_1<mx_1+(1-m)x_2\\(1-m)x_1+mx_2<x_2\end{cases}$，解得 $m<1$，$\therefore\frac{1}{2}<m<1$。

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$\alpha=\beta$，$0=|g(\alpha)-g(\beta)|<|g(x_1)-g(x_2)|$，符合题意。

当 $m<\frac{1}{2}$ 时，$\alpha>\beta$，且 $\alpha-x_2=m(x_1-x_2),\beta-x_1=-m(x_1-x_2)$，

同理有 $x_1<\beta<\alpha<x_2$，即 $\begin{cases}x_1<(1-m)x_1+mx_2\\mx_1+(1-m)x_2<x_2\end{cases}$，解得 $m>0$，$\therefore 0<m<\frac{1}{2}$，

综合以上讨论，得：所求 $m$ 的取值范围是（0，1）。

（方法二）由题设知，$g(x)$ 的导函数 $g'(x)=h(x)(x^2-2x+1)$，其中函数 $h(x)>0$ 对于任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都成立。所以，当 $x>1$ 时，$g'(x)=h(x)(x-1)^2>0$，从而 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

①当 $m\in(0,1)$ 时，有 $\alpha=mx_1+(1-m)x_2>mx_1+(1-m)x_1=x_1$，

$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 < mx_2 + (1-m)x_2 = x_2$，得 $\alpha \in (x_1, x_2)$，同理可得 $\beta \in (x_1, x_2)$，所以由 $g(x)$ 的单调性知 $g(\alpha)$、$g(\beta) \in (g(x_1), g(x_2))$，

从而有 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$，符合题设。

②当 $m \le 0$ 时，$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 \ge mx_2 + (1-m)x_2 = x_2$，

$\beta = (1-m)x_1 + mx_2 \le (1-m)x_1 + mx_1 = x_1$，于是由 $\alpha > 1, \beta > 1$ 及 $g(x)$ 的单调性知 $g(\beta) \le g(x_1) < g(x_2) \le g(\alpha)$，所以 $|g(\alpha) - g(\beta)| \ge |g(x_1) - g(x_2)|$，与题设不符。

③当 $m \ge 1$ 时，同理可得 $\alpha \le x_1, \beta \ge x_2$，进而得 $|g(\alpha) - g(\beta)| \ge |g(x_1) - g(x_2)|$，与题设不符。

因此综合①、②、③得所求的 $m$ 的取值范围是（0，1）