衡中同卷

参考答案及解析

2020年全国高三统一联合考试·理科数学

一、选择题

1.B 【解析】因为 $A=\{x\mid x<3\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$.故选 B.

2.D 【解析】$\dfrac{1-ai}{a+i}=\dfrac{(1-ai)(a-i)}{(a+i)(a-i)}=\dfrac{-(a^2+1)i}{a^2+1}=-i$，故选 D.

3.C 【解析】该蛋糕是由上下两个圆柱形小蛋糕组合而成，其体积为 $V=\pi\times 20^2\times 20+\pi\times 10^2\times 10=9\pi\times 10^3(\text{cm}^3)$.故选 C.

4.B 【解析】由 $\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha-1$，得 $2\cos^2\alpha=2\sin 2\alpha$，即 $\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，又 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha\neq 0$，从而 $2\sin\alpha=\cos\alpha$，即 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.故选 B.

5.C 【解析】因为 $\left(x^2-\dfrac{y}{x}\right)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}\left(-\dfrac{y}{x}\right)^r=(-1)^rC_5^rx^{10-3r}y^r$，所以当 $r=3$ 时，xy^3 的系数为 $(-1)^3C_5^3=-10$.故选 C.

6.A 【解析】由 $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{xe^x}=\dfrac{1}{x}(e^x+e^{-x})$ 为奇函数，可排除 C 和 D；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，可排除 B.故选 A.

7.C 【解析】$l=0+8\times 2=16$，$n=2$，适合 $n\leqslant 2$；$l=16+8\times 2=32$，$n=3$，不适合 $n\leqslant 2$，此时输出 $l=32$.故选 C.

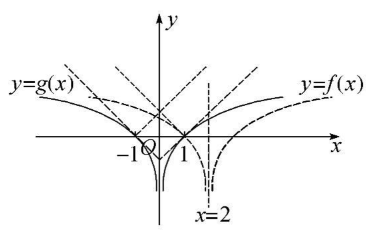
8.D 【解析】由余弦定理，得 $7=a^2+4-2a$，即 $a=3$，利用正弦定理可得 $\sin A=\dfrac{a}{c}\sin C=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.故选 D.

9.A 【解析】由题意得 $P(X=4)=C_9^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$，$P(X=5)=C_9^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$，$P(X=6)=C_9^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$.因为 $C_9^4=C_9^5$，所以 $P(X=4)=P(X=5)$.因为 $C_9^5>C_9^6$，所以 $P(X=5)>P(X=6)$.故选 A.

10.B 【解析】取 DE 的中点 O，连接 OA'，OB.在 $\triangle A'DE$ 中，由 $A'D=A'E=DE=4$ 可得 $OA'=2\sqrt{3}$.在 $\triangle BOE$ 中，由 $OE=2$，$BE=4$，$\angle BEO=120°$ 可得 $OB=2\sqrt{7}$.由 $OA'^2+OB^2=A'B^2$ 可得 $OA'\perp OB$.又因为 $OA'\perp DE$，$OB\cap DE=O$，所以 $OA'\perp$ 底面 $BCDE$，$\angle A'BO$ 即为直线 $A'B$ 与底面 $BCDE$ 所成角.在 $\text{Rt}\triangle A'OB$ 中，$\sin\angle A'BO=\dfrac{OA'}{A'B}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.故选 B.

11.C 【解析】设 C 的准线为 l，过点 B 作 $BD\perp l$，D 为垂足.当且仅当 $AB\perp l$，即点 B,A,D 共线时，$|AB|+|AF|$ 最小，此时点 D 的坐标为 $(-1,b)$.考虑到 $\triangle ABF$ 为正三角形和抛物线的定义，则有 $|AB|=|AF|=|AD|$，从而点 A 的坐标为 $\left(\dfrac{a-1}{2},b\right)$.因此，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-1}{2}+a\right)=1$，解得 $a=\dfrac{5}{3}$.故选 C.

12.A 【解析】将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 2 个单位长度，得到函数 $g(x)=\begin{cases}\ln x,x>0,\\0,x=0,\\\ln(-x),x<0\end{cases}$ 的图像.画出函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图像如图所示，注意到直线 $y=x-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 切于点 $(1,0)$，且直线 $y=x-1$ 在曲线 $y=\ln x$ 的上方.根据对称性，直线 $y=-x-1$ 与曲线 $y=\ln(-x)$ 切于点 $(-1,0)$，且直线 $y=-x-1$ 在曲线 $y=\ln(-x)$ 的上方.而曲线 $y=|x+2-a|=|x-(a-2)|$ 的最低点的坐标为 $(a-2,0)$，故若满足 $f(x)\leqslant|x-a|$，即 $g(x)\leqslant|x+2-a|$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $-1\leqslant a-2\leqslant 1$，即 $1\leqslant a\leqslant 3$.故选 A.



二、填空题

13.$\dfrac{5}{4}$ 【解析】由题得 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(3\lambda-2,2\lambda+1)$.由 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，得 $-2(3\lambda-2)+(2\lambda+1)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{5}{4}$.

14. $x+y=0$ 【解析】因为当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-\ln x$，$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$，所以 $f'(1)=1$.因为函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f'(-1)=-1$.又 $f(-1)=1$，所以函数 $f(x)$ 的图像在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y-1=-(x+1)$，即 $x+y=0$.

15. $\dfrac{2}{3}$ 【解析】由题意知 $g(x)=\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，令 $\pi x-\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=k+\dfrac{5}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得零点为 $x=\dfrac{5}{6}$ 和 $x=-\dfrac{1}{6}$，故所求零点的和为 $\dfrac{2}{3}$.

16. $\dfrac{1}{7}$ 【解析】由 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{5}{4}<(\sqrt{3})^2$，得直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点，设 $|F_2B|=k$，则 $|AF_2|=\lambda k$.根据双曲线定义，$|F_1B|=2a+k$，$|AF_1|=2a+\lambda k$.在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $(2a+\lambda k)^2=(2c)^2+(\lambda k)^2-2\cdot 2c\lambda k\cos 60°$①；在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $(2a+k)^2=(2c)^2+k^2-2\cdot 2ck\cos 120°$②.①－②并整理，得 $\lambda=\dfrac{2a-c}{2a+c}=\dfrac{2-\dfrac{c}{a}}{2+\dfrac{c}{a}}=\dfrac{2-\dfrac{3}{2}}{2+\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{7}$.

三、解答题

17.解：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $\begin{cases}a_1^2q^3=3,\\ a_1q+a_1q^2=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{3},\\ q=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=9,\\ q=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ ………………………… 4 分

又因为数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，所以 $\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{3},\\ q=3\end{cases}$ 不合题意，

故 $\begin{cases}a_1=9,\\ q=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{3-n}$. ………… 6 分

(2)由(1)得 $b_n=2^{n-2}\times3^{2-n}+n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}+n$，

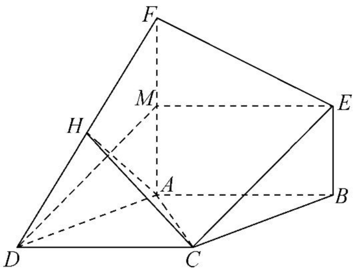
……………………………………………………… 8 分

故 $T_n=\dfrac{\dfrac{3}{2}\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\dfrac{2}{3}}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{n+n^2}{2}$. ………………………… 12 分

18.(1)**证明**：(方法一)因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD\parallel BC$.又因为 $AF\parallel BE$，$AF\cap AD=A$，$BC\cap BE=B$，所以平面 $ADF\parallel$ 平面 BCE. ………………… 2 分

因为 $CE\subset$ 平面 BCE，所以 $CE\parallel$ 平面 ADF. …… 4 分

(方法二)取 AF 的中点 M，连接 DM，EM，如图.



由题意知 $AM=BE$ 且 $AM\parallel BE$，所以四边形 $ABEM$ 为平行四边形，即 $ME=AB$ 且 $ME\parallel AB$. ……… 2 分

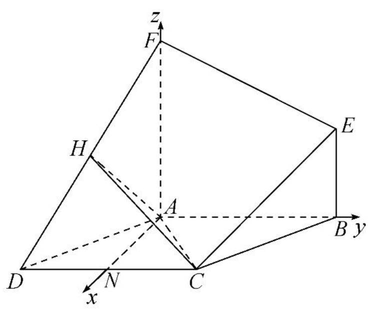
又因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以四边形 $DCEM$ 为平行四边形，即有 $DM\parallel CE$.

又 $DM\subset$ 平面 ADF，$CE\not\subset$ 平面 ADF，所以 $CE\parallel$ 平面 ADF. ……………………………………………… 4 分

(2)**解**：取 CD 的中点 N，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，可得 $AN\perp CD$.

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，$AF\subset$ 平面 $ABEF$，$AF\perp AB$，所以 $AF\perp$ 平面 $ABCD$.

以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$ 如图所示. ……………………………………… 6 分



故 $A(0,0,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(\sqrt{3},-1,0)$，$F(0,0,2)$，$H\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$.

设平面 ACH 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AH}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0.\end{cases}$

令 $x=1$ 可得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$. ………………… 9 分

易知平面 $ABEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$.

……………………………………………………… 10 分

设平面 ACH 与平面 $ABEF$ 所成的锐二面角为 θ，则

$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$,

即所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. …………………… 12 分

19.解：(1)填写列联表如下：

性别	优秀	非优秀	总计
男生	35	65	100
女生	25	75	100
总计	60	140	200

……………………………………………………… 2 分

因为 $K^2=\frac{200\times(35\times75-65\times25)^2}{100\times100\times60\times140}\approx2.381<2.706$,

……………………………………………………… 4 分

所以没有 90%以上的把握认为“理科综合”成绩是否优秀与性别有关. ………………………………… 5 分

(2)利用分层抽样的方法，抽到男生的人数为 $35\times\frac{12}{60}=7$，抽到女生的人数为 $25\times\frac{12}{60}=5$.

若从 12 人中任意抽取 3 人，则女生被抽到的人数 $X=0,1,2,3$，$P(X=0)=\frac{C_7^3C_5^0}{C_{12}^3}=\frac{7}{44}$，$P(X=1)=\frac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{21}{44}$,

$P(X=2)=\frac{C_7^1C_5^2}{C_{12}^3}=\frac{7}{22}$，$P(X=3)=\frac{C_7^0C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}$.

……………………………………………………… 9 分

故抽到女生的人数 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

$E(X)=0\times\frac{7}{44}+1\times\frac{21}{44}+2\times\frac{7}{22}+3\times\frac{1}{22}=\frac{5}{4}$.

……………………………………………………… 12 分

20.解：(1)由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{1}{9}$，又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $b^2=1$，$a^2=9$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ………………… 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l：$y=k(x-1)(k<0)$.

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 得 $(9k^2+1)x^2-18k^2x+9k^2-9=0$,

故 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{9k^2+1}$.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{9k^2}{9k^2+1}$，$y_0=k(x_0-1)=k\left(\frac{9k^2}{9k^2+1}-1\right)=-\frac{k}{9k^2+1}$,

所以直线 OP 的斜率 $k_{OP}=\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{9k}$. ………… 8 分

设直线 l，OP 的倾斜角分别为 α,β，则 $\angle OPB=\alpha-\beta$,

$\tan\angle OPB=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{9}{8}\left(k+\frac{1}{9k}\right)$.

……………………………………………………… 9 分

因为 $k<0$，所以 $-\left(k+\frac{1}{9k}\right)=(-k)+\frac{1}{-9k}\geqslant 2\sqrt{(-k)\cdot\frac{1}{-9k}}=\frac{2}{3}$，即 $k+\frac{1}{9k}\leqslant-\frac{2}{3}$，所以 $\tan\angle OPB\leqslant-\frac{3}{4}$. 当且仅当 $k=-\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

所以当 $\angle OPB$ 最大时，直线 l 的斜率 $k=-\frac{1}{3}$，此时直线 l 的方程为 $x+3y-1=0$. …………………… 12 分

21.(1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f'(x)=2xe^{ax}+x^2\cdot ae^{ax}=x(ax+2)e^{ax}$. ……… 1 分

当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2-1$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内为增函数，在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数； ………… 2 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=ax\left(x+\frac{2}{a}\right)e^{ax}$，令 $f'(x)>0$ 得 $x<-\frac{2}{a}$ 或 $x>0$，令 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{2}{a}<x<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{2}{a}\right)$ 内为增函数，在区间 $\left(-\frac{2}{a},0\right)$ 内为减函数，在区间 $(0,+\infty)$ 内为增函数；

……………………………………………………… 4 分

当 $a<0$ 时，$f'(x)=ax\left(x+\dfrac{2}{a}\right)e^{ax}$，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<-\dfrac{2}{a}$，令 $f'(x)<0$ 得 $x>-\dfrac{2}{a}$ 或 $x<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数，在区间 $\left(0,-\dfrac{2}{a}\right)$ 内为增函数，在区间 $\left(-\dfrac{2}{a},+\infty\right)$ 内为减函数. …… 6 分

(2)**证明**：由 $f(x)>\ln x$，得 $x^2e^{ax}>\ln x+1$，即 $\dfrac{e^{ax}}{x}>\dfrac{\ln x+1}{x^3}$.

设 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x^3}$，

则 $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3-(\ln x+1)\cdot 3x^2}{x^6}$

$$=-\frac{3\ln x+2}{x^4}=-\frac{3(\ln x-\ln e^{-\frac{2}{3}})}{x^4}.$$

当 $0<x<e^{-\frac{2}{3}}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>e^{-\frac{2}{3}}$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,e^{-\frac{2}{3}})$ 内是增函数，在区间 $(e^{-\frac{2}{3}},+\infty)$ 内是减函数，

所以 $x=e^{-\frac{2}{3}}$ 是 $g(x)$ 的极大值点，也是 $g(x)$ 的最大值点，

即 $g(x)_{\max}=g(e^{-\frac{2}{3}})=\dfrac{\ln e^{-\frac{2}{3}}+1}{(e^{-\frac{2}{3}})^3}=\dfrac{1}{3}e^2$. ……… 9 分

设 $h(x)=\dfrac{e^{ax}}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)e^{ax}}{x^2}$.

当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 内是减函数，在区间 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 内是增函数，

所以 $x=\dfrac{1}{a}$ 是 $h(x)$ 的极小值点，也是 $h(x)$ 的最小值点，

即 $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)=ae$.

综上，$g(x)\leqslant\dfrac{1}{3}e^2<ae\leqslant h(x)$，

故 $f(x)>\ln x$ 成立. …………………… 12 分

22.解：(1)曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2=1$.

当 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\dfrac{12}{13}t,\\ y=\dfrac{5}{13}t\end{cases}$ (t 为参数)，代入曲线 C 的普通方程，得 $t^2-\dfrac{48}{13}t+3=0$.

由于 $\Delta=\left(-\dfrac{48}{13}\right)^2-12=\dfrac{276}{169}>0$，故可设点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1\cdot t_2=3$，

所以 $|PA|\cdot|PB|=3$. …………………………… 5 分

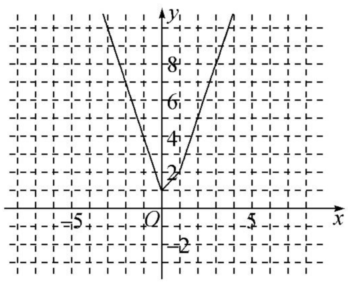
(2)设 $Q(\cos\theta,\sin\theta)$，$M(x,y)$，则由 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MQ}$，得 $(x+2,y)=2(\cos\theta-x,\sin\theta-y)$，

即 $\begin{cases}3x+2=2\cos\theta,\\ 3y=2\sin\theta.\end{cases}$

消去 θ，得 $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}$，

此即为点 M 的轨迹方程. ……………………… 10 分

23.(1)**解**：$f(x)=|x-1|+|2x|=\begin{cases}1-3x,x<0,\\ x+1,0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3x-1,x>1,\end{cases}$ 其图像如下图所示.



……………………………………………… 3 分

令 $f(x)=2$，得 $x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=1$，

由 $f(x)$ 的图像可知，不等式 $f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-\dfrac{1}{3},\text{或 }x\geqslant 1\right\}$. ……………………… 5 分

(2)**证明**：因为 $f(x)+|x-1|=|2x-2|+|2x|\geqslant|2x-2-2x|=2$，

所以 $k\geqslant 3$. …………………………………… 7 分

因为 $k+\dfrac{6}{k}-5=\dfrac{k^2-5k+6}{k}=\dfrac{(k-2)(k-3)}{k}$，

又由 $k\geqslant 3$，得 $k-2>0$，$k-3\geqslant 0$，所以 $\dfrac{(k-2)(k-3)}{k}\geqslant 0$，

即 $k+\dfrac{6}{k}\geqslant 5$. ……………………… 10 分