

唐山市 2022~2023 学年度高三年级第一学期学业水平调研考试

数学参考答案

一. 选择题:

1-4 ADBB 5-8 ACCD

二. 选择题:

9. AC 10. BD 11. AC 12. ACD

三. 填空题:

13. $2-\sqrt{3}$ 14. -4 15. $\frac{21\sqrt{5}}{100}$ 16. $(0, e]$

四. 解答题:

17. 解:

(1) 由 $\cos A = -\frac{c}{b}$ 及正弦定理得 $\cos A = -\frac{\sin C}{\sin B}$,
 即 $\cos A \sin B = -\sin C$, 由 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,
 代入整理得 $\sin A \cos B = -2\cos A \sin B$, 又 $B = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan A = -2\tan B = -2$,
 所以 $\tan C = -\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \frac{1}{3}$5 分

(2) 由 $\cos A = -\frac{c}{b}$ 知, A 为钝角, B 为锐角, 即 $\tan B > 0$.
 由 (1) 知 $\tan A = -2\tan B$,
 所以 $\tan C = -\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \frac{\tan B}{2\tan^2 B + 1} = \frac{1}{2\tan B + \frac{1}{\tan B}}$
 $\leq \frac{\tan B}{2\sqrt{2\tan^2 B \cdot 1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$8 分

当且仅当 $2\tan^2 B = 1$, 即 $\tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立.

所以 $\tan C$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$10 分

18. 解:

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则由 $a_1 = b_1 = 2$, $a_2 = b_2$, $a_5 = b_3$.

可得 $\begin{cases} 2+d=2q \\ 2+4d=2q^2 \end{cases}$, 解得 $q=3$ 或 $q=1$ (舍), 从而 $d=4$,

所以 $a_n = 4n-2$, $b_n = 2 \times 3^{n-1}$5 分

(2) 设 $b_m = a_k$, 即 $2 \times 3^{m-1} = 4k-2$, 得 $3^{m-1} = 2k-1$,

因为 $1 \leq k \leq 100$, 所以 $1 \leq 2k-1 \leq 199$, 故 $1 \leq 3^{m-1} \leq 199$,

由于 $3^4 < 199 < 3^5$, 所以 $0 \leq m-1 \leq 4$, 即 $1 \leq m \leq 5$, ...10 分

$$\text{所以 } \sum_{m=1}^5 b_m = \frac{2 \times (1-3^5)}{1-3} = 242.$$

…12 分

19. 解:

(1) 如图, 取 AD 的中点 O , 连接 OB , OP .

$\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形, 则有 $AD \perp OB$,

又 $AD \perp PB$, $OB \cap PB = B$,

$\therefore AD \perp$ 平面 POB , 则有 $AD \perp PO$. …2 分

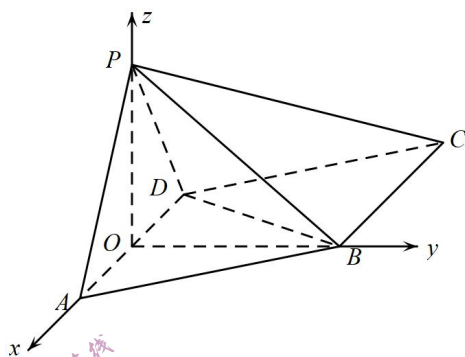
设 $PA = 2$, 则 $AB = 2$, $PB = \sqrt{6}$, $PO = OB = \sqrt{3}$,

$\therefore PB^2 = PO^2 + OB^2$,

$\therefore PO \perp OB$, 又 $OB \cap AD = O$, …4 分

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $PO \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$. …5 分



(2) 设 $PA = 2$, 以 O 为坐标原点, 以 $\{\overrightarrow{OA}, \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}, \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OP}\}$ 为单位正交基底建立空间直角坐标系, 如图所示.

则 $A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(-2, \sqrt{3}, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$,

$\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (-1, 0, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$, $\overrightarrow{BP} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = -x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = -x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_1 = \sqrt{3}, \text{ 得 } \mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1, 1), \quad \dots 8 \text{ 分}$$

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP} = -\sqrt{3}y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_2 = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (0, 1, 1), \quad \dots 10 \text{ 分}$$

设平面 PAB 与平面 PBC 夹角为 θ , 则

$$\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

所以平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. …12 分

20. 解: 高中试卷君

(1) 将 10 位患者服用新药视为 10 重伯努利试验, 在每次实验中,

每位患者治愈的概率为 0.8, 且每位患者是否治愈相互独立,

则 $X \sim B(10, 0.8)$, 故 $E(X) = 10 \times 0.8 = 8$. …4 分

(2) 设 $A =$ “任选 5 位志愿者全部治愈”, 则

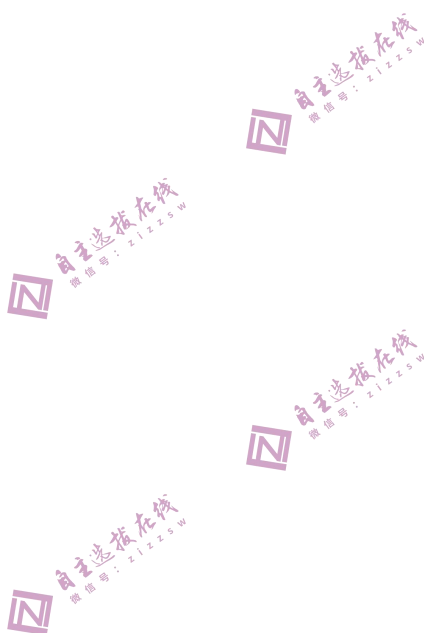
$$P(A) = \frac{C_5^5}{C_{10}^5} = \frac{2}{9}. \quad \dots 7 \text{ 分}$$

(3) 设 $B =$ “经过试验该药被认定无效”, 事件 B 发生等价于 $\{X \leq 4\}$, 则

$$\begin{aligned} p = P(B) &= P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^4 C_{10}^k \times 0.8^k \times 0.2^{10-k} \\ &= 0.0001 + 0.0008 + 0.0055 = 0.0064. \end{aligned} \quad \dots 11 \text{ 分}$$

p 值小于 0.05, 可以认为试验方案合理.

...12 分



21. 解:

$$(1) \text{ 由题意得 } \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\text{得 } a = \sqrt{2}, b = 1, c = 1,$$

$$\text{则椭圆 } E \text{ 的标准方程为: } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \quad \cdots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0,$$

$$\text{依题设 } \Delta = 16k^2m^2 - 4(1 + 2k^2)(2m^2 - 2) = 8(1 + 2k^2 - m^2) > 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}, \quad \cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2 - 1} = \frac{kx_1 + m - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1 - 1} + \frac{kx_2 + m - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2 - 1}$$

$$= 2k + (k + m - \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{(x_1 + x_2 - 2)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$= 2k - (k + m - \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{2(2k^2 + 2km + 1)}{2k^2 + 4km + 2m^2 - 1}$$

$$= 2k - (k + m - \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{2k^2 + 2km + 1}{(k + m)^2 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2k - \frac{2k^2 + 2km + 1}{k + m + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}k - 1}{k + m + \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \cdots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } k_{PA} + k_{PB} = 0, \text{ 于是 } \frac{\sqrt{2}k - 1}{k + m + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$$

$$\text{所以 } \sqrt{2}k - 1 = 0, \text{ 所以 } k = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \Delta = 8(1 + 2k^2 - m^2) > 0, \text{ 得 } -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}. \quad \cdots 11 \text{ 分}$$

因为直线 l 不经过点 P , 所以 $m \neq 0$.

$$\text{于是 } m \text{ 的取值范围为 } -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \text{ 且 } m \neq 0. \quad \cdots 12 \text{ 分}$$

22. 解:

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$\because f'(x) = xe^x + e^x - 1,$$

...1 分

$$\therefore \text{当 } x=0 \text{ 时, } f'(x)=0;$$

...2 分

当 $x>0$ 时, $xe^x>0$, $e^x-1>0$, 则 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x<0$ 时, $xe^x<0$, $e^x-1<0$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减.

故当 $x=0$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(0)=0$; 没有极大值.

...4 分

(2)

由 (1) 知 $g(x)$ 至多有两个零点, 且 $g(0)=f(0)-a=-a<0$.

取函数 $h(x)=e^x-x-1$, 则 $h'(x)=e^x-1$,

当 $x>0$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x<0$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减.

故当 $x=0$ 时, $h(x)$ 取得最小值 $h(0)=0$, 则 $e^x-1\geq x$.

因此, 当 $x>0$ 时, $f(x)=(e^x-1)x>x^2$, 则

$$g(\sqrt{a})=f(\sqrt{a})-a>a-a=0.$$

故 $g(x)$ 存在一个零点 $x_1\in(0, \sqrt{a})\subset(0, +\infty)$.

$$\because e^a-a>0, \therefore e^{a-e^a}<1.$$

则 $g(-e^a)=(e^{-e^a}-1)(-e^a)-a=e^{a-e^a}-e^{a-e^a}-a>e^a-1-a>0$,

故 $g(x)$ 存在另一个零点 $x_2\in(-e^a, 0)\subset(-\infty, 0)$.

综上所述, $g(x)=f(x)-a$ 有两个零点 x_1, x_2 , 即 $f(x_1)=f(x_2)=a$.

...8 分

$$\because x_2<0, \therefore -x_2>0,$$

要证 $x_1+x_2<0$, 只需证明 $x_1<-x_2$.

由于当 $x>0$ 时, $f(x)$ 单调递增, 故只需证明 $f(x_1)\leq f(-x_2)$, 即证 $f(x_2)\leq f(-x_2)$.

令 $h(x)=f(x)-f(-x)$, $x<0$.

$$\text{则 } h'(x)=f'(x)+f'(-x)=x(e^x-e^{-x})+e^x+e^{-x}-2.$$

$$\because x<0, \therefore e^x-e^{-x}<0, x(e^x-e^{-x})>0. \text{ 又 } e^x+e^{-x}>2,$$

故 $h'(x)>0$, 当 $x<0$ 时, $h(x)$ 单调递增.

$$\because x_2<0, \therefore h(x_2)<h(0)=0, \text{ 则 } f(x_2)<f(-x_2).$$

因此 $x_1+x_2<0$.

...12 分