

# 参考答案及解析

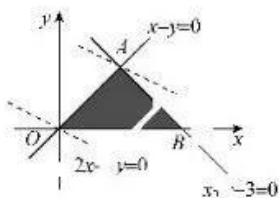
## 理科数学(一)

### 一、选择题

1. C 【解析】由已知得  $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ , 全集  $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , 故  $\complement_I(M \cup N) = \{0, 5, 7, 9\}$ .

2. B 【解析】因为  $z = \frac{a+2i}{1+i} = \frac{(a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a+2}{2} + \frac{2-a}{2}i$ , 所以  $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{2}\right)^2 = 10$ , 解得  $a = \pm 4$ . 代入检验知,  $a = -4$  符合题意.

3. C 【解析】画出约束条件表示的可行域如图中阴影部分所示. 目标函数  $z = 2x + 3y$ , 可化为  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}$ . 当直线  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}$  过点  $A(2, 2)$  时, 在  $y$  轴上的截距最大, 此时目标函数取得最大值, 又由  $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$  得  $A\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right)$ , 所以目标函数  $z = 2x + 3y$  的最大值为  $z_{\max} = 2 \times \frac{2}{2} + 3 \times \frac{2}{2} = \frac{7}{2}$ .



4. A 【解析】由题意得  $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ , 令  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$  (当且仅当  $x=0$  时, 等号成立), 可知  $f'(x)$  为增函数. 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > f'(0) = 0$ , 则  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上为增函数, 故排除选项 BD; 又  $f(-x) = f(x)$ , 所以  $f(x)$  的图象关于  $y$  轴对称, 故排除选项 C.

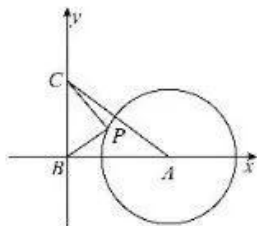
5. A 【解析】当  $0 < a < 1$  时, 幂函数  $y = x^a$  在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数, 所以  $0.3^{0.2} > 0.2^{0.2}$ ; 当  $0 < a < 1$  时, 指数函数  $y = a^x$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 所以  $0.2^{0.2} > 0.2^{0.3}$ , 所以  $a > b$ . 因为  $-\frac{1}{5\ln 0.3} < -\frac{1}{5\ln \frac{1}{3}} < -\frac{1}{5\ln \frac{1}{e}} = \frac{1}{5} = 0.2 < 0.2^{0.3}$ , 所以  $b > c$ , 故  $a > b > c$ .

6. B 【解析】因为  $S_{1\ 023} - S_{1\ 000} = a_{1\ 001} + a_{1\ 002} + \dots + a_{1\ 023} = 23a_{1\ 012} = 1$ , 所以  $a_{1\ 012} = \frac{1}{23}$ , 故  $S_{2\ 023} =$

$$\frac{a_1 + a_{2\ 023}}{2} \times 2\ 023 = a_{1\ 012} \times 2\ 023 = \frac{2\ 023}{23}.$$

7. D 【解析】因为  $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 4$ , 当且仅当  $x=y=2$  时, 等号成立, 所以 A 正确; 因为  $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 4$ , 所以  $x^2+y^2 \geq 8$ , 当且仅当  $x=y=2$  时, 等号成立, 所以 B 正确; 因为  $\frac{x}{4-x} + \frac{y}{4-y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$ , 当且仅当  $x=y=2$  时等号成立, 所以 C 正确; 因为  $x^2 - 2y = x^2 - 2(4-x) = x^2 + 2x - 8 = (x+1)^2 - 9$ , 又  $x+y=4$ , 且  $x>0, y>0$ , 所以  $0 < x < 4$ . 因为函数  $f(x) = (x+1)^2 - 9$  在区间  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x) \in (-8, 16)$ , 所以 D 不正确.

8. D 【解析】如图, 以  $B$  为坐标原点,  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$  的方向分别为  $x, y$  轴的正方向, 建立平面直角坐标系, 则  $B(0,0), A(2,0), C(0,2)$ . 设  $P(x,y)$ , 则  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = x^2 + y^2 - 2x - 2y = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2$ . 因为  $|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{2}$ , 所以  $P$  是圆  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  上的点. 又点  $P$  与点  $(0,1)$  连线的最大值为  $|\overrightarrow{BP}| + r = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ , 所以  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}$  的最大值为  $(2\sqrt{2})^2 - 2 = 18$ , 所以  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}$  的最大值为 17.



9. A 【解析】因为  $\sin 2x + \cos^2 x = 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{2\sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\tan x + 1}{\tan^2 x + 1} = -\frac{3}{5}$ , 整理得  $3\tan^2 x + 10\tan x + 8 = 0$ , 解得  $\tan x = -2$  或  $\tan x = -\frac{4}{3}$ . 当  $\tan x = -2$  时,  $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times (-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{4}{3}$ ; 当  $\tan x = -\frac{4}{3}$  时,  $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times (-\frac{4}{3})}{1 - (-\frac{4}{3})^2} = \frac{24}{7}$ .

高考押题卷

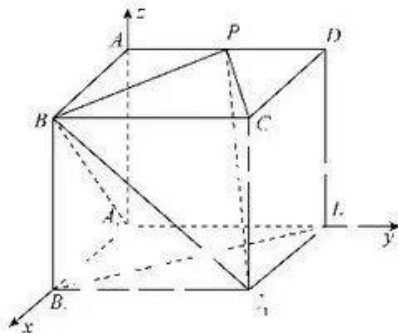
· 全国卷 ·

10. C 【解析】连接 AM. 由渐近线的定义, 得  $M(a, b)$ . 由  $\angle FNA = 90^\circ$ , 得  $|ON|^2 = |OF| \cdot |OA|$ , 即  $|ON| = \sqrt{ac}$ . 因为  $ON \parallel AM$ , 所以  $\frac{|ON|}{|AM|} = \frac{|OF|}{|AF|}$ , 即  $\frac{\sqrt{ac}}{b} = \frac{c}{c+a}$ . 化简得  $c^2 - 2ac - a^2 = 0$ , 两边同除以  $a^2$ , 得  $e^2 - 2e - 1 = 0$ , 解得  $e = 1 + \sqrt{2}$  ( $1 - \sqrt{2}$  舍去).

11. A 【解析】因为  $a_{n+1} + a_n = 2n + 1$ , 所以  $a_{n+1} - (n+1) = -(a_n - n)$ , 且  $a_1 - 1 = -2$ , 即  $\{a_n - n\}$  是以  $-2$  为首项,  $-1$  为公比的等比数列, 所以  $a_n - n = -2 \cdot (-1)^{n-1} = 2 \times (-1)^n$ , 即  $a_n = n + 2 \times (-1)^n$ . 当  $n$  为偶数时,  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ , 当  $n$  为奇数时,  $S_n = \frac{n(n+1)}{2} - 2$ . 又  $S_{n+1} + S_n = 2S_n + a_{n+1}$ , 当  $n$  为偶数时, 由  $2S_n + a_{n+1} = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) + 2 \times (-1)^{n+1} = 2 \times 399$ , 得  $n^2 + 2n - 2400 = 0$ , 解得  $n = 48$  或  $n = -50$  (舍去); 当  $n$  为奇数时, 由  $2S_n + a_{n+1} = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4 + (n+1) + 2 \times (-1)^{n+1} = 2 \times 399$ , 得  $n^2 + 2n - 2400 = 0$ , 解得  $n = 48$  或  $n = -50$  (舍去). 综上可知,  $n = 48$ .

12. C 【解析】以  $A$  为坐标原点, 分别以  $AB, AD_1, A_1A$  所在直线为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系, 设正方体的棱长为 1,  $P(x, y, z) \in [0, 1]$ , 则  $\overrightarrow{A_1B} = (1, 0, 1)$ ,  $\overrightarrow{C_1P} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (-1, a-1, 1)$ . 因为  $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{C_1P} = (1, 0, 1) \cdot (-1, a-1, 1) = -1 + 0 + 1 = 0$ , 所以  $A_1B \perp PC_1$ , 故①正确; 因为  $\overrightarrow{B_1D_1} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$ , 所以  $\cos \langle \overrightarrow{C_1P}, \overrightarrow{B_1D_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{B_1D_1}}{|\overrightarrow{C_1P}| |\overrightarrow{B_1D_1}|} = \frac{a}{\sqrt{2} \times \sqrt{2 + (a-1)^2}} = \frac{a}{\sqrt{2} \times \sqrt{a^2 - 2a + 3}}$ . 当  $a = 0$  时,  $\cos \langle \overrightarrow{C_1P}, \overrightarrow{B_1D_1} \rangle = 0$ , 所以此时异面直线  $C_1P$  与  $B_1D_1$  所成的角为  $\frac{\pi}{2}$ ; 当  $a \in (0, 1]$  时,  $\frac{a}{\sqrt{2} \times \sqrt{a^2 - 2a + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2}}}$ . 令  $f(a) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}}}$ ,  $\frac{1}{a} \in [1, +\infty)$ , 则  $f(a) \in \left( 0, \frac{1}{2} \right]$ , 所以  $\cos \langle \overrightarrow{C_1P}, \overrightarrow{B_1D_1} \rangle \in \left( 0, \frac{1}{2} \right]$ , 所以异面直线  $C_1P$  与  $B_1D_1$  所成角的取值范围为  $\left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$ . 综上所述可知异面直线  $C_1P$  与  $B_1D_1$  所成角的取值范围为  $\left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ , 故②正确; 若  $BP \perp$  平面  $CC_1P$ , 则  $BP \perp$

$CP$ , 因为  $\overrightarrow{CP} = (0, a, 1) - (1, 1, 1) = (-1, a-1, 0)$ ,  $\overrightarrow{BP} = (0, a, 1) - (1, 0, 1) = (-1, a, 0)$ , 所以  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = (-1, a, 0) \cdot (-1, a-1, 0) = 1 + a^2 - a = 0$ , 因为方程  $a^2 - a + 1 = 0$  无实数解, 所以  $BP \perp CP$  不成立, 故③不正确; 因为  $V_{\text{三棱锥 } B-PC_1C} = V_{\text{三棱锥 } P-BCC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCC_1} \times DC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$ , 故④正确.



二、填空题

13. -3 【解析】由条件可知,  $f'(x) = 2x + 2f'(1) + \frac{1}{x}$ , 则  $f'(1) = 2 + 2f'(1) + 1$ , 解得  $f'(1) = -3$ .

14. -100 【解析】因为  $(x-2y)^6$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = (-2)^r C_6^r x^{6-r} y^r$ , 所以  $(x+y)(x-2y)^6$  的展开式中  $x^4 y^3$  项的系数为  $(-2)^3 C_6^3 + (-2)^2 C_6^4 = -100$ .

15. 0 【解析】根据题意,  $f(x+1)$  为奇函数, 所以  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称, 故  $f(1) = 0$ . 因为  $f(x)$  为偶函数, 所以  $f(-x) = f(x)$ , 故  $f(-1) = f(1) = 0$ . 又  $f(x+2) = -f(x)$ , 所以  $f(x+4) = f(x)$ , 即  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数. 所以  $f(2023) = f(4 \times 506 - 1) = f(-1) = f(1) = 0$ .

16. 1 【解析】设  $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{2p}\right), B\left(x_2, \frac{x_2^2}{2p}\right)$ , 显然, 直线 AB 的斜率存在, 且  $k = \frac{\frac{x_2^2}{2p} - \frac{x_1^2}{2p}}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2p}$ , 则直线 AB 的方程为  $y = \frac{x_1 + x_2}{2p}x + 2$ . 联立  $\begin{cases} y = \frac{x_1 + x_2}{2p}x + 2 \\ x^2 = 2py \end{cases}$ , 整理得  $x^2 - (x_1 + x_2)x - 4p = 0$ , 则  $x_1 x_2 = -4p$ . 由  $x^2 = 2py$ , 得  $y = \frac{x^2}{2p}$ , 求导得  $y' = \frac{x}{p}$ , 故切线 AM 的方程为  $y - \frac{x_1^2}{2p} = \frac{x_1}{p}(x - x_1)$ , 即  $y = \frac{x_1}{p}x - \frac{x_1^2}{2p}$  ①. 同理可得切线 BM 的方程为  $y = \frac{x_2}{p}x - \frac{x_2^2}{2p}$  ②. 两式相减, 得 M 的横坐标  $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . 两式相加, 得 M 的纵坐标  $b = \frac{x_1 + x_2}{2p}x - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4p} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4p} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4p} =$



理科数学

参考答案及解析

$$\frac{2x_1x_2}{4p} = \frac{-8p}{4p} = -2. \text{ 由 } a+b=-1, \text{ 得 } a=1, \text{ 所以}$$

$$M(1, -2), l_{AB}: y = \frac{1}{p}x + 2, \text{ 即 } x - py + 2p = 0, \text{ 所以}$$

$$\text{点 } M \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{|1+4p|}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以}$$

$$7p^2 + 16p - 23 = 0, \text{ 解得 } p=1 \text{ 或 } p=-\frac{23}{7} \text{ (舍去).}$$

三、解答题

17. 解: (1) 由题意知  $AB=c=2b, AD=\frac{\sqrt{17}}{6}c=\frac{\sqrt{17}}{3}b,$

$$BD=\frac{a}{3}.$$

在  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理, 得  $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4b^2 + a^2 - b^2}{2 \times 2b \times a} = \frac{a^2 + 3b^2}{4ab};$  (3分)

在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理, 得  $\cos B =$

$$\frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{4b^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{17}{9}b^2}{2 \times \frac{\sqrt{17}}{3}b \times \frac{a}{3}} = \frac{a^2 + 19b^2}{12ab},$$

$$\text{则 } \frac{a^2 + 3b^2}{4ab} = \frac{a^2 + 19b^2}{12ab}, \text{ 整理得 } a^2 = b^2,$$

$$\text{所以 } b^2 + c^2 = a^2, \text{ 故 } \angle BAC = 90^\circ.$$

(2) 由  $a=\sqrt{5}$  及 (1), 得  $b=1, c=2$ , 则  $\cos C =$

在  $\triangle AEC$  中,  $CE=\frac{\sqrt{5}}{3}$ , 由余弦定理, 得  $AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cos C = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{8}{9}$ , 则  $AE = \frac{2\sqrt{2}}{3};$  (9分)

由正弦定理, 得  $\frac{AC}{\sin \angle AEC} = \frac{AE}{\sin C},$

$$\text{则 } \sin \angle AEC = \frac{AC}{AE} \cdot \sin C = \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

故  $\triangle ADE$  的外接圆的直径为  $2R = \frac{AD}{\sin \angle AED} =$

$$\frac{\frac{\sqrt{17}}{6}c}{\sin \angle AEC} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{6} \times 2}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{\sqrt{170}}{9}. \quad (12分)$$

18. 解: (1) 由题意可知, 注射甲药物的患者共 100 人, 治疗效果明显的有 76 人, 故注射甲药物治疗效果明显的概率为  $P_1 = \frac{76}{100} = \frac{19}{25};$  (2分)

注射乙药物的患者共 100 人, 治疗效果明显的有 84

人, 故注射乙药物治疗效果明显的概率为  $P_2 = \frac{84}{100} =$

$$\frac{21}{25}. \quad (4分)$$

(2) 由表中的数据可知,

$$K^2 = \frac{200 \times (76 \times 16 - 84 \times 24)^2}{160 \times 40 \times 100 \times 100} = 2. \quad (6分)$$

因为  $2 < 2.706$ ,

所以没有 90% 的把握认为甲、乙两种药物对治疗该种疾病的效果有差异. (7分)

(3) 从样本中对甲、乙两种药物治疗效果不明显的患者中按分层抽样的方法抽出 5 名患者, 则应从甲、乙两种药物治疗效果不明显的患者中分别抽取 3 人, 2 人,

随机变量  $X$  的所有可能取值为 1, 2, 3, (8分)

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_2^0}{C_5^3} = \frac{1}{10}. \quad (10分)$$

所以  $X$  的分布列为

|     |                |               |                |
|-----|----------------|---------------|----------------|
| $X$ | 1              | 2             | 3              |
| $P$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

(11分)

$$\text{故 } E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}. \quad (12分)$$

19. 解: (1) 因为四边形  $ABCD$  是菱形, 所以  $AB \parallel CD$ ,

又  $CD \subset \text{平面 } CDEG, AB \not\subset \text{平面 } CDEG,$

所以  $AB \parallel \text{平面 } CDEG.$

同理可得  $AF \parallel \text{平面 } CDEG.$

又  $AB \cap AF = A, AB, AF \subset \text{平面 } ABF,$

所以平面  $ABF \parallel \text{平面 } CDEG.$

又平面  $BGEF \cap \text{平面 } CDEG = EG, \text{平面 } BGEF \cap \text{平面 } ABF = BF,$

所以  $EG \parallel BF.$

同理可得  $BG \parallel EF.$

所以四边形  $BGEF$  是平行四边形. (2分)

如图, 连接  $FG, BE$  交于点  $M$ , 连接  $AC, BD$  交于点  $N$ , 连接  $MN$ , 设  $AF = a, CG = b$ , 则  $DE = 2MN = AF + CG = a + b$ , 延长  $EG, DC$  交于点  $Q$ , 连接  $BQ$ .

因为  $AH \parallel \text{平面 } BGEF, AH \subset \text{平面 } ABQD, \text{平面 } ABQD \cap \text{平面 } BGEF = BQ,$

所以  $AH \parallel BQ.$

又  $AB \parallel HQ$ , 所以四边形  $AHQB$  为平行四边形, 则  $HQ = AB = CD.$

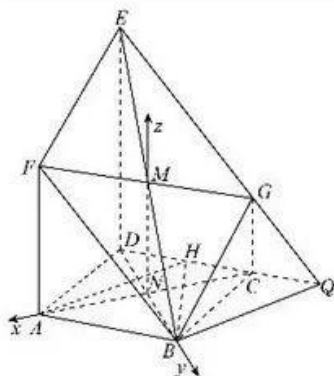
因为  $H$  为  $CD$  的中点, 所以  $QC = CH = HD.$  (4分)

$$\text{因为 } CG \parallel DE, \text{ 所以 } \frac{CG}{DE} = \frac{QC}{QD} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \frac{b}{a+b} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } a = 2b, \text{ 即 } \frac{AF}{CG} = 2. \quad (5分)$$

高考押题卷

· 全国卷 ·



(2)由(1)知,  $MN, AC, BD$  两两垂直, 故以  $N$  为坐标原点,  $\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NM}$  的方向分别为  $x, y, z$  轴的正方向, 建立空间直角坐标系如图所示, 则  $B(0, 1, 0)$ ,

$H\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), F(\sqrt{3}, 0, 2), G(-\sqrt{3}, 0, 1)$ , 所以  
 $\overrightarrow{BF} = (\sqrt{3}, -1, 2), \overrightarrow{BG} = (-\sqrt{3}, -1, 1), \overrightarrow{BH} =$   
 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ . (7分)

设平面  $BGEF$  的法向量为  $m = (x, y, z)$ ,

则  $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{BG} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} \sqrt{3}x - y + 2z = 0, \\ -\sqrt{3}x - y + z = 0. \end{cases}$

取  $x = \sqrt{3}$ , 得  $y = -9, z = 4$ , 则  $m = (\sqrt{3}, -9, 4)$  是平面  $BGEF$  的一个法向量. (9分)

故直线  $BH$  与平面  $BGEF$  所成角的正弦值为

$$|\cos \langle m, \overrightarrow{BH} \rangle| = \frac{|m \cdot \overrightarrow{BH}|}{|m| |\overrightarrow{BH}|} = \frac{\left| -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} \right|}{\sqrt{120} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \quad (12分)$$

20. (1)证明: 因为  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$ , 所

以  $g'(x) = xe^x - x = x(e^x - 1)$ , (1分)

当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $e^x - 1 < 0$ , 则  $x(e^x - 1) > 0$ ;

当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $e^x - 1 \geq 0$ , 则  $x(e^x - 1) \geq 0$ ,

所以  $g'(x) \geq 0$  恒成立,

故  $g(x)$  是增函数. (4分)

(2)解: 设  $m(x) = \ln(x+1) - x, x > 0$ ,

则  $m'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} < 0$ ,

所以  $m(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上为减函数,

则  $m(x) < m(0) = 0$ , 即  $\ln(x+1) < x$ .

因为  $f'(x) = xe^x$ , 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $e^x > 1$ , 所以  $x < f'(x)$ .

故当  $a \leq 1$  时,  $a \ln(x+1) \leq \ln(x+1) < x < f'(x)$ , 则  $f'(x) > a \ln(x+1)$ ; (6分)

当  $a > 1$  时, 设  $F(x) = f'(x) - a \ln(x+1) = xe^x - a \ln(x+1)$ , 则  $F'(x) = (x+1)e^x - \frac{a}{x+1} = (x+1) \left[ e^x - \frac{a}{(x+1)^2} \right]$ .

$$\frac{a}{(x+1)^2} \Big].$$

因为  $F'(0) = 1 - a < 0$ ,

$F'(\sqrt{a}-1) = \sqrt{a}(e^{\sqrt{a}-1} - 1) > 0$ ,

所以存在  $x_0 \in (0, \sqrt{a}-1)$ , 使得  $F'(x_0) = 0$ .

易知  $F'(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上为增函数, 所以当  $x \in (0, x_0)$  时,  $F'(x) < 0$ ,  $F(x)$  在区间  $(0, x_0)$  上单调递减, 则  $F(x) < F(0) = 0$ , 即  $f'(x) < a \ln(x+1)$ , 不符合题意,

故  $a \leq 1$ . (8分)

设  $p(x) = a \ln(x+1) - \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{1}{x} \right) = a \ln(x+1) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3, x > 0$ ,

则  $p'(x) = \frac{a}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax^2 - x - 1}{(x+1)x^2}$ .

令  $p'(x) = 0$ , 则  $ax^2 - x - 1 = 0$ ,

当  $a \leq 0$  时,  $p(1) < 0$ , 不符合题意, 故  $0 < a \leq 1$ .

此时, 方程  $ax^2 - x - 1 = 0$  在区间  $(0, +\infty)$  内只有一个实数根, 记为  $x_1$ .

当  $x \in (0, x_1)$  时,  $p'(x) < 0$ ,  $p(x)$  单调递减; 当  $x \in (x_1, +\infty)$  时,  $p'(x) > 0$ ,  $p(x)$  单调递增, 则  $p(x_1)$  为  $p(x)$  的最小值,

故  $p(x) \geq 0$  恒成立, 当且仅当  $p(x_1) = a \ln(x_1+1) + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3 \geq 0$ .

将  $a = \frac{1}{x_1^2}$  代入  $p(x)$ , 得  $p(x) = \frac{1}{x_1^2} \ln(x_1+1) + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3$ . (11分)

设  $q(x) = \frac{(x+1) \ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3, x > 0$ ,

则  $q'(x) = \frac{x^2[1 + \ln(x+1)] - 2x(x+1) \ln(x+1)}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{-(x+2) \ln(x+1)}{x^3} < 0$ ,

所以  $q(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上为减函数. (11分)

因为  $x_1 = 2$  时,  $a = \frac{3}{4}, q(2) = 0$ , 所以当  $0 < x \leq 2$  时,  $q(x) \geq 0$ .

设  $t(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ , 则  $t'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ ,

所以当  $x \in (0, 2]$  时,  $t'(x) < 0$ , 则  $t(x)$  在区间  $(0, 2]$  上单调递减, 则  $t(x) \geq t(2) = \frac{3}{4}$ .

因为  $a = \frac{x_1+1}{x_1^2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}, x_1 \in (0, 2]$ ,

所以  $a \geq \frac{3}{4}$ .

又  $0 < a \leq 1$ , 所以  $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ .

故实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ . (12分)

21. 解: (1) 由题意设圆  $M$  的半径为  $r$ , 则  $|MO_1| = r + \frac{1}{2}$ .

$|MO_2| = \frac{7}{2} - r$ , 所以  $|MO_1| + |MO_2| = 4 > |O_1O_2| = 2$ ,

(2分)

故圆心  $M$  的轨迹是以  $O_1(-1, 0), O_2(1, 0)$  为焦点, 4 为长轴长的椭圆.

所以  $c=1, a=2$ , 则  $b^2=3$ .

所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . (4分)

(2) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x_0, y_0)$ , 直线  $AB$  的方程为  $y=kx+t$ . 将  $y=kx+t$  代入  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 整理

得  $(3+4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0$ ,

$\Delta = (8kt)^2 - 4(3+4k^2)(4t^2 - 12) > 0$ ,

即  $4k^2 - t^2 + 3 > 0$ ,

则  $x_1 + x_2 = -\frac{8kt}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4t^2 - 12}{3+4k^2}$ ,

所以  $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$= \sqrt{\left(-\frac{8kt}{3+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4t^2 - 12}{3+4k^2}}$

$= \frac{\sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2}$ ,

故  $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{1+k^2} \times \sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2}$ .

又原点  $O$  到直线  $AB$  的距离为  $d = \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$ .

所以  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB| \times d$

$= \frac{\sqrt{1+k^2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3+4k^2-t^2}}{3+4k^2} \times \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$

$= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{(3+4k^2-t^2)t^2}}{3+4k^2}$  (6分)

$\leq \frac{2\sqrt{3} \times \frac{3+4k^2-t^2+t^2}{2}}{3+4k^2} = \sqrt{3}$ ,

当且仅当  $3+4k^2-t^2=t^2$ , 即  $3+4k^2=2t^2$  (\*) 时, 等号成立.

由  $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ , 得  $\begin{cases} x_0 = \lambda x_1 + \mu x_2, \\ y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2, \end{cases}$

代入  $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ , 整理得  $\lambda^2 \left(\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3}\right) + \mu^2 \left(\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3}\right) + 2\lambda\mu \left(\frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3}\right) = 1$ ,

即  $\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \left(\frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3}\right) = 1$  (\* \*). (8分)

而  $\frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3} = \frac{x_1x_2}{4} + \frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{3}$

$= \frac{(3+4k^2)x_1x_2 + 4kt(x_1+x_2) + 4t^2}{12}$

$= \frac{(3+4k^2) \times \frac{4t^2-12}{3+4k^2} + 4kt \times \left(-\frac{8kt}{3+4k^2}\right) + 4t^2}{12}$

$= \frac{2t^2 - (3+4k^2)}{3+4k^2}$ ,

由(\*)可知  $\frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3} = 0$ , 代入(\* \*) 式得  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ .

故  $\lambda^2 + \mu^2$  的值为 1. (12分)

22. 解: (1) 由  $\begin{cases} x=3+2\cos\alpha, \\ y=1+2\sin\alpha \end{cases}$  得  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ ,

所以  $C$  的普通方程为  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ . (2分)

将  $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$  代入  $3\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 3 = 0$  中,

得  $3x - 4y + 3 = 0$ ,

所以  $l$  的直角坐标方程为  $3x - 4y + 3 = 0$ . (4分)

(2) 由题知圆  $C$  的圆心  $(3, 1)$ , 半径  $R=2$ .

设点  $P$  到直线  $l$  的距离为  $d$ ,

则  $d = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$ . (6分)

设圆心  $C$  到直线  $l$  的距离为  $h$ ,

则  $h = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{8}{5}$ . (7分)

则  $|AB| = 2 \times \sqrt{R^2 - h^2} = 2 \times \sqrt{2^2 - \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{6}{5}$ . (9分)

所以  $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{25}$ . (10分)

23. (1) 解: 因为  $|x+m| + |x+2| \geq |x+m-x-2| = |m-2|$ , 当且仅当  $(x+m)(x+2) \leq 0$  时, 等号成立.

(2分)

由题得  $|m-2| \geq 3$ , 解得  $m \geq 5$  或  $m \leq -1$ . (4分)

因为  $m > 0$ , 所以  $m \geq 5$ , 所以  $M=5$ . (5分)

(2) 证明: 由(1)知  $2a+b+c=5$ , 所以  $(a+b)+(a+c)=5$ . (6分)

所以  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{1}{5} [(a+b) + (a+c)] \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$

$= \frac{1}{5} \left( 2 + \frac{a+c}{a+b} + \frac{a+b}{a+c} \right) \geq \frac{1}{5} \left( 2 + 2\sqrt{\frac{a+c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a+c}} \right) = \frac{4}{5}$ , (9分)

当且仅当  $\frac{a+c}{a+b} = \frac{a+b}{a+c}$ , 即  $b=c$  时, 等号成立,

故  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{4}{5}$ . (10分)



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线