

绝密★本科目考试启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试

数 学（理）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 若集合 $A = \{x \mid -2 < x < 1\}$, $B = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 $A \cap B =$

(A) $\{x \mid -2 < x < -1\}$

(B) $\{x \mid -2 < x < 3\}$

(C) $\{x \mid -1 < x < 1\}$

(D) $\{x \mid 1 < x < 3\}$

(2) 若复数 $(1 - i)(a + i)$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是

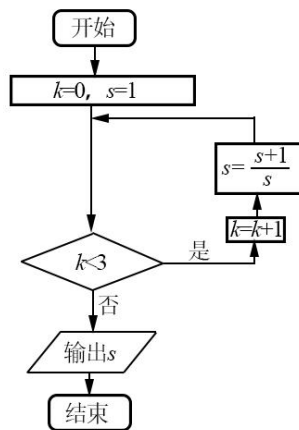
(A) $(-\infty, 1)$

(B) $(-\infty, -1)$

(C) $(1, +\infty)$

(D) $(-1, +\infty)$

(3) 执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为



(A) 2

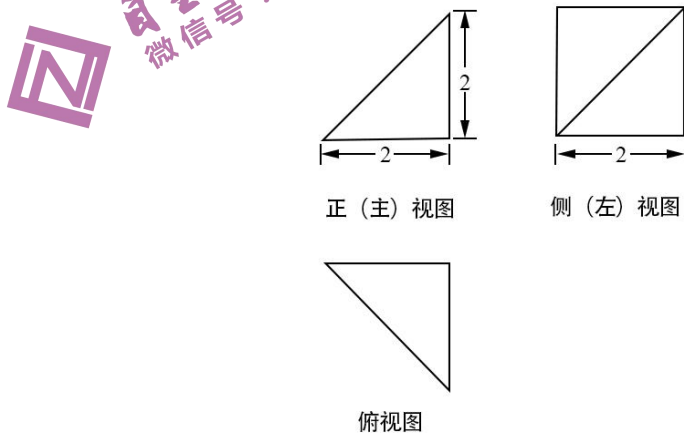
(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{8}{5}$

(4) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3, \\ x + y \geq 2, \\ y \leq x, \end{cases}$ 则 $x + 2y$ 的最大值为

- (A) 1 (B) 3
(C) 5 (D) 9
- (5) 已知函数 $f(x) = 3^x - (\frac{1}{3})^x$, 则 $f(x)$
- (A) 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 上是增函数 (B) 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 上是增函数
(C) 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 上是减函数 (D) 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 上是减函数
- (6) 设 m, n 为非零向量, 则“存在负数 λ , 使得 $m = \lambda n$ ”是“ $m \cdot n < 0$ ”的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (7) 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的最长棱的长度为



- (A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2
- (8) 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361} , 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80} . 则下列各数中与 $\frac{M}{N}$ 最接近的是
- (参考数据: $\lg 3 \approx 0.48$)
- (A) 10^{33} (B) 10^{53}
(C) 10^{73} (D) 10^{93}

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，则实数 $m =$ _____。

(10) 若等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = -1$ ， $a_4 = b_4 = 8$ ，则 $\frac{a_2}{b_2} =$ _____。

(11) 在极坐标系中，点 A 在圆 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$ 上，点 P 的坐标为 $(1, 0)$ ，则 $|AP|$ 的最小值为_____。

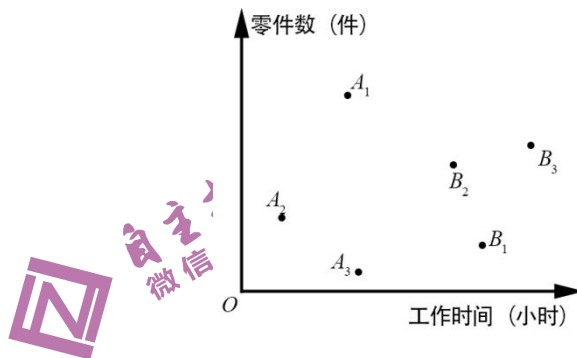
(12) 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 y 轴对称。若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ， $\cos(\alpha - \beta) =$ _____。

(13) 能够说明“设 a, b, c 是任意实数。若 $a > b > c$ ，则 $a + b > c$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____。

(14) 三名工人加工同一种零件，他们在一天中的工作情况如图所示，其中点 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数，点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数， $i=1, 2, 3$ 。

①记 Q_i 为第 i 名工人在这一天中加工的零件总数，则 Q_1, Q_2, Q_3 中最大的是_____。

②记 p_i 为第 i 名工人在这一天中平均每小时加工的零件数，则 p_1, p_2, p_3 中最大的是_____。



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $c = \frac{3}{7}a$ 。

(I) 求 $\sin C$ 的值；

(II) 若 $a=7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

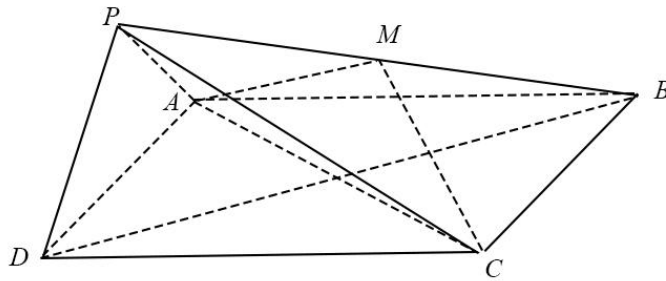
(16) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 在线段 PB 上, $PD \parallel$ 平面 MAC , $PA=PD=\sqrt{6}$, $AB=4$.

(I) 求证: M 为 PB 的中点;

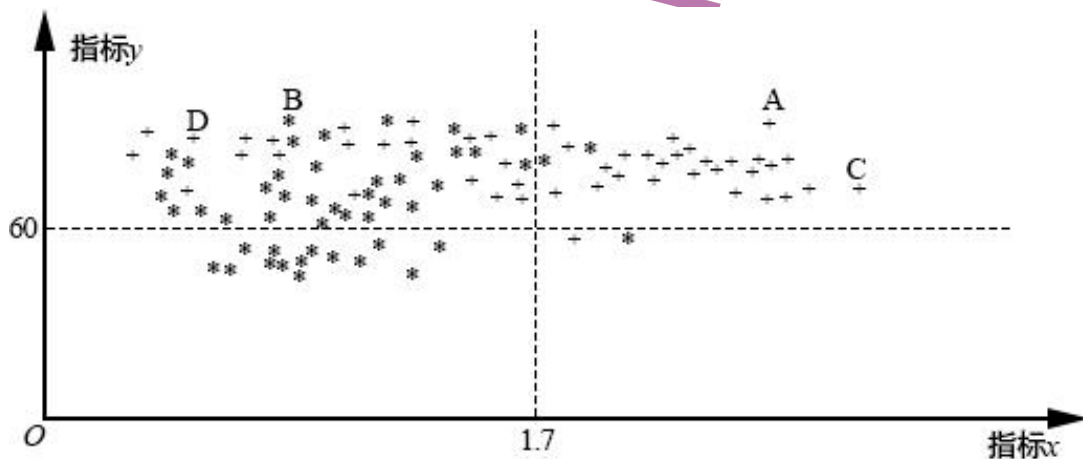
(II) 求二面角 $B-PD-A$ 的大小;

(III) 求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值.



(17) (本小题 13 分)

为了研究一种新药的疗效, 选 100 名患者随机分成两组, 每组各 50 名, 一组服药, 另一组不服药. 一段时间后, 记录了两组患者的生理指标 x 和 y 的数据, 并制成下图, 其中 “*” 表示服药者, “+” 表示为服药者.



(I) 从服药的 50 名患者中随机选出一人, 求此人指标 y 的值小于 60 的概率;

(II) 从图中 A, B, C, D 四人中随机选两人, 记 ξ 为选出的两人中指标 x 的值大于 1.7 的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$;

(III) 试判断这 100 名患者中服药者指标 y 数据的方差与未服药者指标 y 数据的方差的大小. (只需写出结论)

(18) (本小题 14 分)

已知抛物线 $C: y^2=2px$ 过点 $P(1, 1)$. 过点 $(0, \frac{1}{2})$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的

两点 M, N , 过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP, ON 交于点 A, B , 其中 O 为原点.

(I) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程;

(II) 求证: A 为线段 BM 的中点.

(19) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x - x$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

(20) (本小题 13 分)

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列, 记

$$c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

其中 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_s 这 s 个数中最大的数.

(I) 若 $a_n = n, b_n = 2n - 1$, 求 c_1, c_2, c_3 的值, 并证明 $\{c_n\}$ 是等差数列;

(II) 证明: 或者对任意正数 M , 存在正整数 m , 当 $n \geq m$ 时, $\frac{c_n}{n} > M$; 或者存在正整

数 m , 使得 $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 是等差数列.