2023 年深圳市高三年级第二次调研考试

数学试题参考答案及评分标准

2023．4

本试卷 22 小题，满分 150 分。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	B	D	D	C	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ABD	BCD	BD	AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．1　　14．0.82　　15．2　　16．$72-16\sqrt{5}$，$72\sqrt{2}-16\sqrt{5}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

解：（1）$\because \sin(A-B)=2\sin C=2\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$，…… 1 分

$\therefore \sin A\cos B-\cos A\sin B=2(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$，

$\therefore \sin A\cos B+3\cos A\sin B=0$，…… 3 分

由正弦定理和余弦定理得 $a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+3b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，…… 4 分

化简得 $a^2=b^2+2c^2$．…… 5 分

（2）（法 1）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $b^2+c^2+bc=9$，…… 6 分

又 $\because$ $b^2+2c^2=a^2=9$，…… 7 分

$\therefore b=c=\sqrt{3}$，…… 8 分

由 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BM}$，得 $BM=\dfrac{a}{3}$，

在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理得 $AM^2=c^2+(\dfrac{1}{3}a)^2-2c\times\dfrac{1}{3}a\times\cos B$，

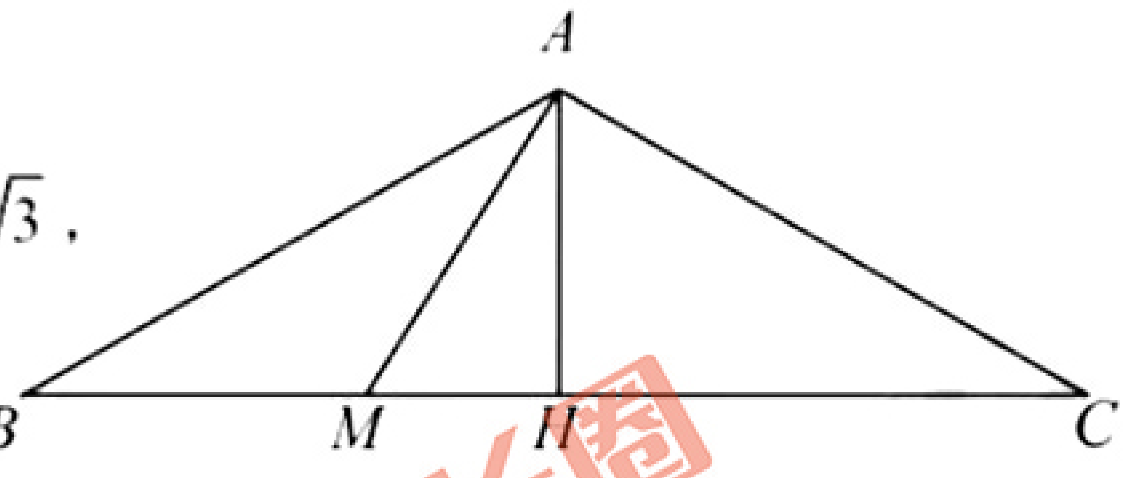
$\therefore AM=1$．…… 10 分

（法 2）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $b^2+c^2+bc=9$，…… 6 分

又 $\because$ $b^2+2c^2=a^2=9$，…… 7 分

$\therefore b = c = \sqrt{3}$ ………………………………………………………………………… 8 分

由 $\vec{BC} = 3\vec{BM}$，得 $BM = 1$，



过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H，则 $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\angle AMH = \frac{AH}{MH} = \sqrt{3}$，

$\because \angle AMH \in (0, \frac{\pi}{2})$，$\therefore \angle AMH = \frac{\pi}{3}$，

（第 17 题图）

$\therefore AM = 2MH = 1$． ………………………………………………………………………… 10 分

18．（12 分）

解：（1）样本中爱好飞盘运动的年轻人中男性 16 人，女性 24 人，比例为 4：6，按照性别采用分层抽样的方法抽取 10 人，则抽取男性 4 人，女性 6 人． ………………………… 1 分

随机变量 X 的取值为：0，1，2，3．

$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$， ………………………………………………………… 2 分

$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$， ………………………………………………………… 3 分

$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$， ………………………………………………………… 4 分

$P(X=3) = \frac{C_4^3}{} = \frac{1}{}$ 5 分

$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$， ………………………………………………………… 5 分

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 0\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{3}{10} + 3\times\frac{1}{30} = \frac{6}{5}$． ………………………… 6 分

（2）零假设为 H_0：爱好飞盘运动与性别无关联． ………………………………………… 7 分

根据列联表重的数据，经计算得到 $\chi^2 = \frac{50\times(6\times 24 - 4\times 16)^2}{10\times 40\times 22\times 28} \approx 1.299 < 6.635 = x_{0.01}$， ………… 9 分

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为爱好飞盘运动与性别无关联． ………………………………………………………… 10 分

列联表中所有数据都扩大到原来的 10 倍后，$\chi^2 = \frac{500\times(60\times 240 - 40\times 160)^2}{100\times 400\times 220\times 280} \approx 12.99 > 6.635 = x_{0.01}$，

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 成立，即认为爱好飞盘运动与性别有关联．

所以，结论不一样，原因是每个数据都扩大为原来的 10 倍，相当于样本量变大为原来的 10 倍，导致推断结论发生了变化． ………………………………………………………………………… 12 分

19.（12 分）

证明：（1）设 AC 的中点为 O，连接 OA_1，OB，

因为 $AB=BC$，所以 $AC\perp OB$，…………………………………… 1 分

又因为 $A_1C_1//AC$，且 $A_1C_1\perp A_1B$，所以 $AC\perp A_1B$，…………………… 2 分

因为 A_1B，$OB\subset$ 平面 OBA_1，且 $A_1B\cap OB=B$，

所以 $AC\perp$ 平面 OBA_1． …………………………………… 3 分

因为 $OA_1\subset$ 平面 OBA_1，

所以 $AC\perp OA_1$，…………………………………… 4 分

又因为 O 是 AC 的中点，

所以 $A_1A=A_1C$． …………………………………… 5 分

解：（2）（法 1）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理求得 $AC=2\sqrt{3}$，则 $A_1C_1=AC=2\sqrt{3}$．

因为 $A_1C_1\perp A_1B$，所以 $A_1B^2+A_1C_1^2=BC_1^2$，解得 $A_1B=\sqrt{2}$． …………………… 6 分

在 $Rt\triangle AOA_1$ 和 $Rt\triangle AOB$ 中，可知 $A_1O=OB=1$．

在 $\triangle OBA_1$ 中，$OA_1^2+OB^2=A_1B^2$，因此 $A_1O\perp OB$． …………………… 7 分

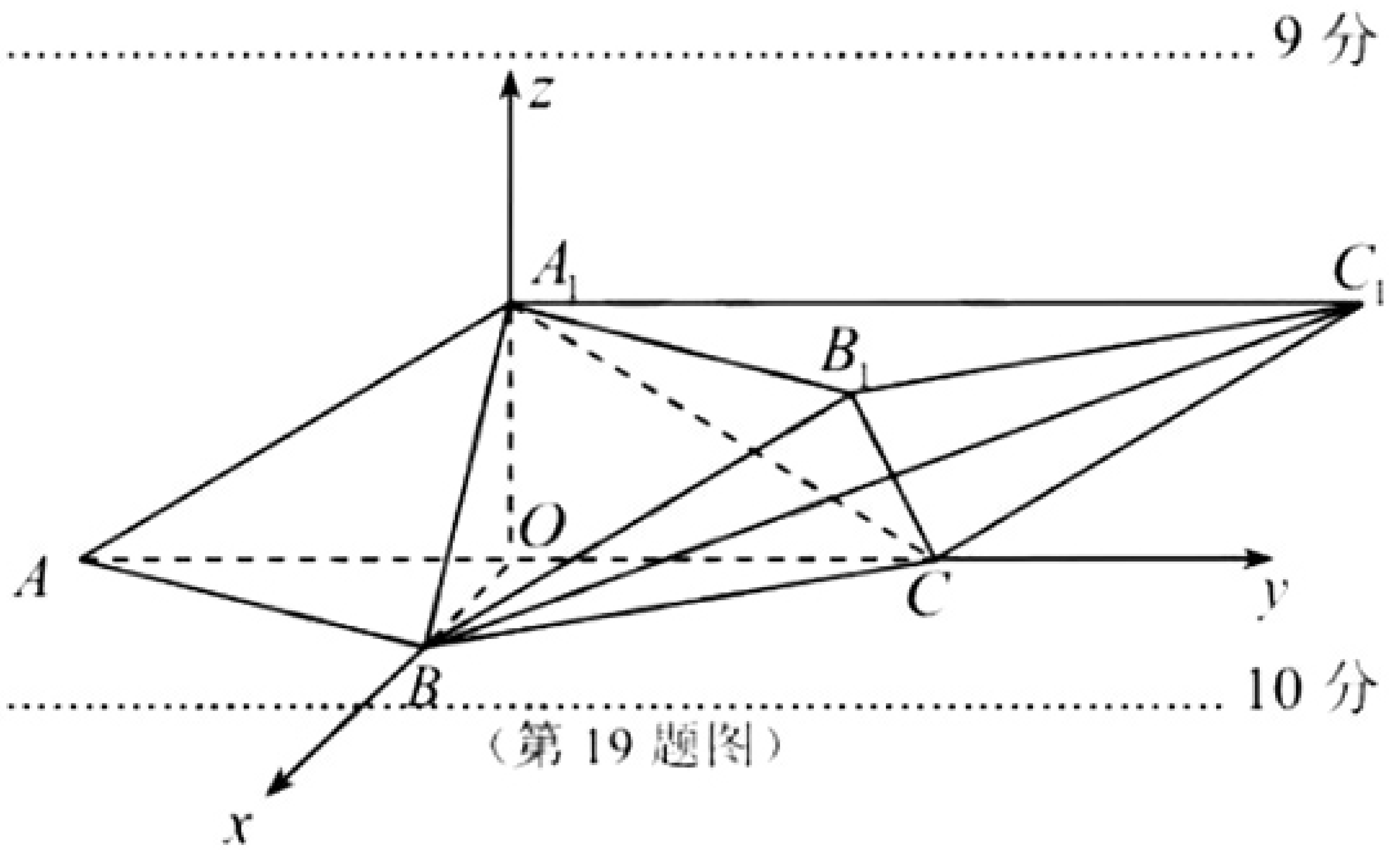
由（1）知，$A_1O\perp AC$，且 AC，$OB\subset$ 平面 ABC，且 $AC\cap OB=O$，

所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC． …………………………………… 8 分

以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA_1}$ 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,1)$，

$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$A(0,-\sqrt{3},0)$．所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(0,\sqrt{3},1)$． …………………………………… 9 分



（第 19 题图）

设平面 A_1CB_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ \sqrt{3}y_1-z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$． …………………… 10 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot \overrightarrow{BC}=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot \overrightarrow{BB_1}=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -x_2+\sqrt{3}y_2=0 \\ \sqrt{3}y_2+z_2=0 \end{cases}$，

令 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$． ……………………………………………………………11 分

设平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5}{7}$，

所以平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{5}{7}$． …………………………………………… 12 分

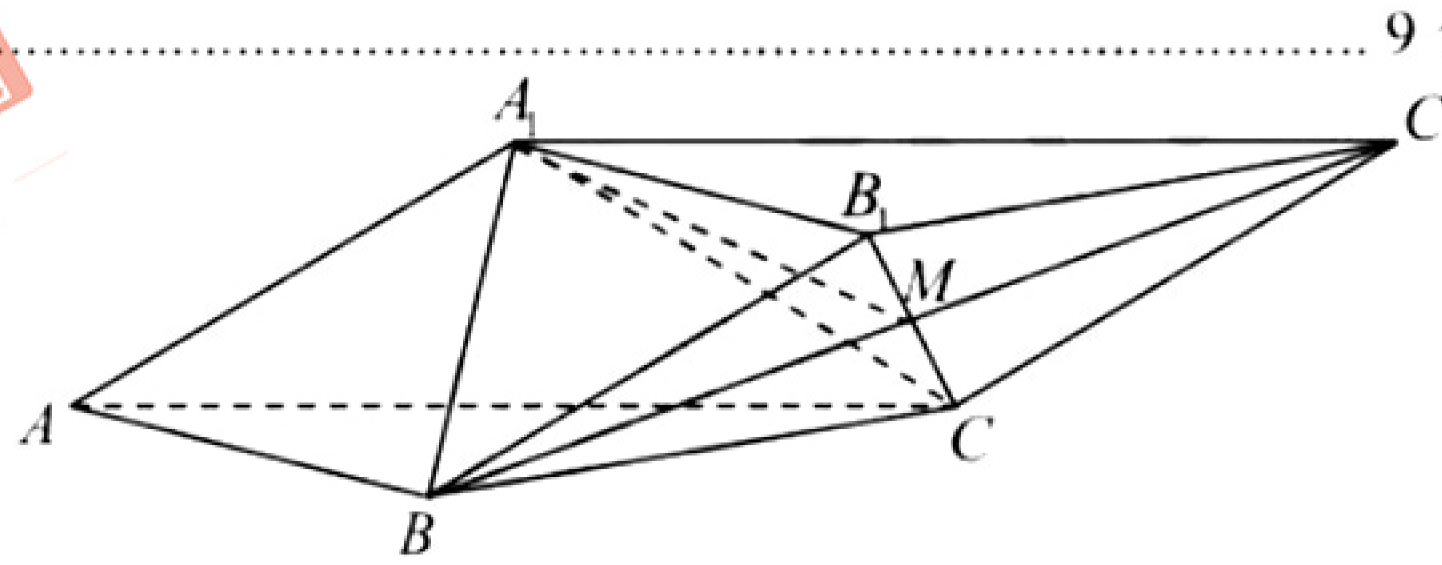
（法 2）设 BC_1 与 B_1C 相交于点 M．同（法 1）可求得 $A_1B_1=A_1C=B_1C_1=CC_1=2$， ………… 7 分

因此，$C_1M\perp B_1C$，$A_1M\perp B_1C$，所以 $\angle A_1MC_1$ 是平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角（或其补角），

…… 9 分

因为 $A_1M=C_1M=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，$A_1C_1=2\sqrt{3}$，

在 $\triangle A_1MC_1$ 中，由余弦定理可得，



（第 19 题图）

$\cos\angle A_1MC_1=\dfrac{A_1M^2+C_1M^2-A_1C_1^2}{2A_1M\times C_1M}=-\dfrac{5}{7}$， ……………………………………………11 分

所以平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{5}{7}$． …………………………………………… 12 分

20．（12 分）

解：（1）由 $a_na_{n+1}=9\times 2^{2n-1}$，得 $a_{n+1}a_{n+2}=9\times 2^{2n+1}$， ……………………………………… 1 分

以上两式相比，得 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=4$， …………………………………………………………………… 2 分

由 $a_1\times a_2=18$，$a_1=3$，得 $a_2=6$， ……………………………………………………………… 3 分

所以，数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为3，公比 4 为的等比数列，$a_{2n-1}=3\times 4^{n-1}=3\times 2^{(2n-1)-1}$， ………… 4 分

数列 $\{a_{2n}\}$ 是首项为6，公比为4 的等比数列，$a_{2n}=6\times 4^{n-1}=3\times 2^{2n-1}$， ………………………… 5 分

综上，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3\times 2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$． ……………………………………… 6 分

（2）假设数列 $\{a_n\}$ 中存在三项数列 a_m，a_k，a_p（其中 $m<k<p$）成等差数列，

则 $a_m+a_p=2a_k$， ……………………………………………………………………………………… 7 分

由（1）得 $3\times 2^{m-1}+3\times 2^{p-1}=6\times 2^{k-1}$，即 $2^{m-1}+2^{p-1}=2^k$， …………………………………… 8 分

两边同时除以 2^{m-1}，得 $1+2^{p-m}=2^{k-m+1}$，（＊）

$\because m<k<p$，且 $m,k,p\in\mathbf{N}^*$，$\therefore k-m+1, p-m\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore$（＊）式左边为奇数，右边为偶数

$\therefore$（＊）等式不成立，假设不成立.

所以，数列 $\{a_n\}$ 中得任意三项均不能构成等差数列. …………………………………………………… 12 分

21.（12 分）

解：（1）（法 1）因为点 $M(2,\sqrt{3})$，$B(1,0)$，

直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，

所以，垂线 l 的方程为 $x=-\sqrt{3}y+2$，…………………………………………………………………… 1 分

设点 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+2\\x^2-y^2=1\end{cases}$，得 $2y^2-4\sqrt{3}y+3=0$，…………………………………………………… 2 分

则 $\Delta=(-4\sqrt{3})^2-4\times2\times3=24$，$\begin{cases}y_1+y_2=2\sqrt{3}\\y_1y_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，…………………………………………… 3 分

即 $|ST|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{6}$，…………………………………………………… 4 分

原点 O 到直线 l 的距离为 $d=1$，

所以，$\triangle OST$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times|ST|\times d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times1=\sqrt{6}$. …………………………………………… 5 分

（法 2）因为点 M 的坐标为 $M(2,\sqrt{3})$，点 B 的坐标为 $B(1,0)$ 直线 BM 的斜率，

$k_{BM}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，所以垂线 l 的方程为 $x=-\sqrt{3}y+2$，………………………………………… 1 分

设点 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+2\\x^2-y^2=1\end{cases}$，得 $2x^2+4x-7=0$，…………………………………………………… 2 分

则 $\Delta=4^2+4\times2\times7=72$，$\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1x_2=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$，…………………………………………………… 3 分

即 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\sqrt{2}$，…………………………………………………… 4 分

垂线 l 与 y 轴的交点为 $(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，

所以，$\triangle OST$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|x_1-x_2|\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{6}$． ……………………………… 5 分

（2）①②作为条件，③作为结论

令点 $D(0,y_D)$， $M(x_0,y_0)(x_0>1)$，

由题意得 $B(1,0)$， $A(-1,0)$，

$\because A,D,M$ 三点共线，

$\therefore \frac{y_0}{x_0+1}=y_D$， ……………………………………………………………………… 7 分

又 $\because \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $E(0,\frac{2y_0}{x_0+1})$， ……………………………………………………… 8 分

$\therefore$ 直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$，

$\because BM\perp EQ$，

$\therefore k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$

设点 $Q(x_Q,0)$，

$\because$ 直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=\frac{1-x_0}{y_0}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-x_Q}$， ……………………………………………… 10 分

$\therefore x_Q=\frac{2y_0^2}{x_0^2-1}=\frac{2y_0^2}{y_0^2}=2$，

$\therefore |OQ|=2$． …………………………………………………………………………… 12 分

①③作为条件，②作为结论

令点 $D(0,y_D)$， $M(x_0,y_0)(x_0>1)$，

由已知点 B 的坐标为 $B(1,0)$， $A(-1,0)$，

$\because A,D,M$ 三点共线，

$\therefore \frac{y_0}{x_0+1}=y_D$， ……………………………………………………………………… 7 分

又 $\because \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $E(0,\frac{2y_0}{x_0+1})$， ……………………………………………………… 8 分

又$\because$ $|OQ|=2$，点 Q 在 x 轴正半轴上，$\therefore Q(2,0)$，

$\therefore k_{EQ}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-2}=-\frac{y_0}{x_0+1}$， ………………………………………………………… 10 分

又 $\because k_{BM}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，

$\therefore k_{BM}k_{EQ}=-\dfrac{y_0}{(x_0-1)}\cdot\dfrac{y_0}{(x_0+1)}=-\dfrac{{x_0}^2-1}{{x_0}^2-1}=-1$，

$\therefore BM\perp EQ$． .... 12 分

②③作为条件，①作为结论

令点 $D(0,y_D)$，$B(1,0)$，$M(x_0,y_0)(x_0>1)$，不妨设 $y_0>0$，

$\because A,D,M$ 三点共线，

$\therefore y_D=\dfrac{y_0}{x_0+1}>0$，且 ${y_D}^2=\dfrac{y_0^2}{(x_0+1)^2}=\dfrac{x_0^2-1}{(x_0+1)^2}=\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$， .... 8 分

$\because$ 点 Q 在 x 轴正半轴上且 $|OQ|=2$，$\therefore$ 点 $Q(2,0)$，

$\because BM\perp EQ$，

$\therefore k_{EQ}=-\dfrac{1}{k_{BM}}=\dfrac{1-x_0}{y_0}$， .... 10 分

又 $\because k_{EQ}=\dfrac{y_E-0}{0-2}$，

$\therefore y_E=\dfrac{2(x_0-1)}{y_0}>0$，且 ${y_E}^2=\dfrac{4(x_0-1)^2}{y_0^2}=\dfrac{4(x_0-1)^2}{x_0^2-1}=\dfrac{4(x_0-1)}{x_0+1}$，

$\therefore y_E=2y_D$，即 $OD=DE$． .... 12 分

22．（12 分）

解：（1）设 $f(x)=e^{mx-1}-x$，$f'(x)=me^{mx-1}-1$， .... 1 分

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)=me^{mx-1}-1<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减； .... 2 分

当 $m>0$ 时，设 $F(x)=me^{mx-1}-1$，$F'(x)=m^2e^{mx-1}>0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,\dfrac{1-\ln m}{m})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{1-\ln m}{m})$ 上单调递减；

当 $f(x)$ 在 $x\in(\dfrac{1-\ln m}{m},+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1-\ln m}{m},+\infty)$ 上单调递增． .... 3 分

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)=me^{mx-1}-1<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减； .... 2 分

当 $m>0$ 时，设 $F(x)=me^{mx-1}-1$，$F'(x)=m^2e^{mx-1}>0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,\dfrac{1-\ln m}{m})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{1-\ln m}{m})$ 上单调递减；

当 $f(x)$ 在 $x\in(\dfrac{1-\ln m}{m},+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1-\ln m}{m},+\infty)$ 上单调递增． .... 3 分

（2）（i）$g(x)=e^{mx-1}-\dfrac{\ln x+1}{m}(m>0)$，$g'(x)=me^{mx-1}-\dfrac{1}{mx}=\dfrac{m^2xe^{mx-1}-1}{mx}$，

设 $h(x)=m^2xe^{mx-1}-1$，则 $h'(x)=m^2(mx+1)e^{mx-1}$，

$\because h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由（1）可知当 $m=1$ 时，则 $f(x)\geqslant f(\frac{1-\ln m}{m})=\frac{\ln m}{m}=\frac{\ln 1}{1}=0$，即 $e^{x-1}\geqslant x$， ………………………… 4 分

∴ $h(m^{-\frac{3}{2}}+1)=m^2\cdot(m^{-\frac{3}{2}}+1)\cdot e^{m\cdot(m^{-\frac{3}{2}}+1)-1}-1\geqslant m^2\cdot(m^{-\frac{3}{2}}+1)\cdot m(m^{-\frac{3}{2}}+1)-1$，

∴ $h(m^{-\frac{3}{2}}+1)>m^2\cdot m^{-\frac{3}{2}}\cdot m\cdot m^{-\frac{3}{2}}-1=0$

又∵ $h(0)=-1$，由零点存在性定理可知，

存在 $x_1\in(0,m^{-\frac{3}{2}}+1)$，使得 $h(x_1)=0$，即 $mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，（*）

∴ $g(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递减，在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增， ………………………… 5 分

当 $m\geqslant 1$ 时，由（*）可知 $g(x_1)=e^{mx_1-1}-\frac{\ln x_1+1}{m}=\frac{1-mx_1(\ln x_1+1)}{m^2x_1}$，且 $mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}\leqslant 1$，

设 $\varphi(x)=xe^{x-1}$，$\varphi'(x)=(x+1)e^{x-1}>0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∵ $\varphi(1)=1$，∴ $mx_1\leqslant 1$，又由 $m\geqslant 1$ ∴ $x_1\leqslant\frac{1}{m}\leqslant 1$，

∴ $1-mx_1(\ln x_1+1)\geqslant 1-mx_1\geqslant 0$，即 $g(x)\geqslant g(x_1)\geqslant 0$，与条件矛盾， ………………………… 6 分

当 $0<m<1$ 时，$g(1)=e^{m-1}-\frac{1}{m}$，

设 $G(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，$G'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，

∴ $G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∴ $G(x)<G(1)=0$，即 $g(1)<0$，

∵ $e^{x-1}\geqslant x$，∴ $x-1\geqslant\ln x$，即 $\sqrt{x}-1\geqslant\ln\sqrt{x}$，∴ $2\sqrt{x}-2\geqslant\ln x$，

则 $g(x)\geqslant mx-\frac{2\sqrt{x}-2+1}{m}>mx-\frac{2\sqrt{x}}{m}$，∴ $g(\frac{4}{m^4})>m\cdot\frac{4}{m^4}-\frac{2\cdot\frac{2}{m^2}}{m}=0$，且 $\frac{4}{m^4}>1$，

当 $0<m<1$ 时，$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}>1$，

∴由 $\varphi(x)$ 的单调性可知 $mx_1>1$，且 $x_1>\frac{1}{m}>1$，

∴ $g(x)$ 在区间 $(1,x_1)$ 上单调递减，在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增， ………………………… 7 分

∴由零点存在性定理可知，$g(x)$ 在区间 $(1,\frac{4}{m^4})$ 上存在唯一零点，

$g(\frac{1}{e})=e^{\frac{m}{e}-1}-\frac{\ln\frac{1}{e}+1}{m}=e^{\frac{m}{e}-1}>0$，且 $\frac{1}{e}<1$，

$\therefore$ 由零点存在性定理可知，$g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e},1)$ 上存在唯一零点，

$\therefore$ 当 $0<m<1$ 时，$g(x)$ 恰有两个零点. .... 8 分

（2）（ii）$\because mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，即 $2\ln m+\ln x_1+mx_1-1=0$，

$\therefore g(x_1)=e^{mx_1-1}-\frac{\ln x_1+1}{m}=\frac{1}{m^2x_1}+x_1+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}$， .... 9 分

由基本不等式可得，$g(x_1)=\frac{1}{m^2x_1}+x_1+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{m^2x_1}\cdot x_1}+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}=\frac{2\ln m}{m}$，

由 $mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，可知若 $x_1=\frac{1}{m}$，则 $m=1$，与 $0<m<1$ 矛盾，

则 $x_1\neq\frac{1}{m}$，

$\therefore g(x)\geqslant g(x_1)>\frac{2\ln m}{m}$， .... 10 分

要证 $g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，即证 $g(x_1)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，

设 $H(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，

则 $H'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，

$\therefore H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $0<x<1$，$H(x)>H(1)=0$， .... 11 分

$\because 0<m<1$，

$\therefore 0<m^{\frac{1}{m}}<1$，

$\therefore \frac{2\ln m}{m}=2\ln m^{\frac{1}{m}}>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，

又 $g(x)\geqslant g(x_1)>\frac{2\ln m}{m}$，

$\therefore g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$. .... 12 分