绝密★启用前

2024届高三年级调研考试

数　学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. $\frac{i}{(1+i)^3}=$

A. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$　　B. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$　　C. $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$　　D. $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

2. 已知集合 $A=\{x|\sqrt{x}\geq 1\}$, $B=\{x|x^2\leq 9\}$,则 $[-3,+\infty)=$

A. $\complement_R(A\cap B)$　　B. $\complement_R(A\cup B)$　　C. $A\cap B$　　D. $A\cup B$

3. 已知圆经过点 $A(4,4)$, $B(-2,4)$, $C(4,-4)$,则该圆的半径为

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 10

4. 对于任意实数 x,用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,例如: $[\pi]=3$, $[0.1]=0$, $[-2.1]=-3$,则"$[x]>[y]$"是"$x>y$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知函数 $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{10}\right)$,若将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度后所得的图象关于坐标原点对称,则 m 的最小值为

A. $\frac{\pi}{10}$　　B. $\frac{\pi}{5}$　　C. $\frac{3\pi}{10}$　　D. $\frac{8\pi}{15}$

6. 位于成都市龙泉驿区的东安湖体育公园是第31届世界大学生夏季运动会的核心场馆,它包含一座综合运动场、一座多功能体育馆、一座游泳跳水馆和一座综合小球馆.现安排包含甲、乙在内的6名同学到这4个场馆做志愿者,每人去1个场馆,每个场馆至少安排1个人,

则甲、乙两人安排在相同场馆的方法种数为

A. 96　　B. 144　　C. 240　　D. 360

7. 把过棱锥的顶点且与底面垂直的直线称为棱锥的轴，过棱锥的轴的截面称为棱锥的轴截面. 现有一个正三棱锥、一个正四棱锥、一个正六棱锥，它们的高相等，轴截面面积的最大值也相等，则此正三棱锥、正四棱锥、正六棱锥的体积之比为

A. $1:\frac{\sqrt{3}}{3}:\frac{9}{4}$　　B. $1:\frac{\sqrt{3}}{3}:\frac{9}{8}$　　C. $1:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{9}{8}$　　D. $1:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{3}{2}$

8. 若 α,β 为锐角，且 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的最小值为

A. $2\sqrt{2}-2$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $2\sqrt{3}-2$　　D. $\sqrt{3}-1$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{10}$（$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{10}$）中，$x_5$ 与样本平均数相等，$x_6=0$. 则去掉以下哪个数据以后，新的样本数据的方差一定比原来的样本数据的方差小

A. x_1　　B. x_5　　C. x_6　　D. x_{10}

10. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$，则

A. $f(x)$ 在定义域上单调递增

B. $f(x)$ 没有零点

C. 不存在平行于 x 轴且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线

D. $f(x)$ 的图象是中心对称图形

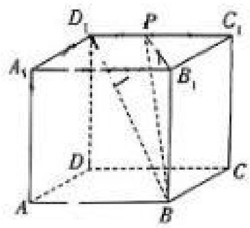
11. 如图所示，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是线段 C_1D_1 上的动点，则下列说法正确的是

A. 平面 $BB_1P\perp$ 平面 $ABCD$

B. 存在点 P，使 $BP=2$

C. 存在点 P，使直线 B_1P 与 BD_1 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$

D. 存在点 P，使点 A,C 到平面 BB_1P 的距离之和为 3



12. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(6,0)$，以坐标原点 O 为圆心，线段 OF 为半径作圆与双曲线 E 在第一、二、三、四象限依次交于 A,B,C,D 四点，若 $\cos\angle AOF=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则

A. $|AC|=|BD|=12$　　B. $\cos\angle AOB=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

C. 四边形 $ABCD$ 的面积为 $32\sqrt{2}$　　D. 双曲线 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $y=4$ 与抛物线交于点 M，且 $|MF|=4$，则 $p=$ ______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$E$ 是线段 AD 上的动点，设 $\overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $2x+3y=$ ______.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=3a_n+2$，$a_3+a_2=22$，则满足 $a_n>160$ 的最小正整数 $n=$ ______.

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>-f(x)$，若 $f(\ln 3)=\frac{1}{3}$，则满足不等式 [illegible] 的 x 的取值范围是 ______.

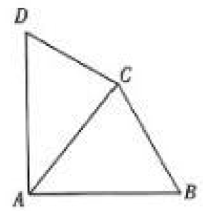
四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90°$，$D=60°$，$AC=4$，$CD=3$.

（Ⅰ）求 $\cos\angle CAD$；

（Ⅱ）若 $AB=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，求 BC.



18.（12 分）

记递增的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_5=85$，且 $a_6=7a_1$.

（Ⅰ）求 a_n 和 S_n；

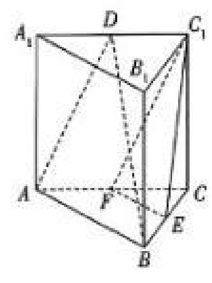
（Ⅱ）设 $b_n=\frac{5}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=2BC=CC_1=2$，D，E，F 分别是棱 A_1C_1，BC，AC 的中点，$\angle ACB=60°$.

（Ⅰ）证明：平面 ABD // 平面 FEC_1；

（Ⅱ）求直线 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值.



20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(2,3)$，且 C 的右焦点为 $F(2,0)$.

（Ⅰ）求 C 的离心率；

（Ⅱ）过点 F 且斜率为 1 的直线与 C 交于 M,N 两点，P 是直线 $x=8$ 上的动点，记直线 PM，PN,PF 的斜率分别为 k_{PM},k_{PN},k_{PF}，证明：$k_{PM}+k_{PN}=2k_{PF}$.

21.（12 分）

小李参加某项专业资格考试，一共要考 3 个科目，若 3 个科目都合格，则考试直接过关；若都不合格，则考试不过关；若有 1 个或 2 个科目合格，则所有不合格的科目需要进行一次补考，补考都合格的考试过关，否则不过关. 已知小李每个科目每次考试合格的概率均为 p $(0<p<1)$，且每个科目每次考试的结果互不影响.

（Ⅰ）记“小李恰有 1 个科目需要补考”的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0.

（Ⅱ）以（Ⅰ）中确定的 p_0 作为 p 的值.

（i）求小李这项资格考试过关的概率；

（ii）若每个科目每次考试要缴纳 20 元的费用，将小李需要缴纳的费用记为 X 元，求 $E(X)$.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{me}{\sin x}$，$m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq0$.

（Ⅰ）若当 $x\in(0,\pi)$ 时 $f(x)\geqslant1$ 恒成立，求 m 的取值范围；

（Ⅱ）若 $\exists x_1,x_2\in(0,\pi)$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1+x_2>\frac{\pi}{2}$.

2024 届高三年级调研考试

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查复数的基本运算.

解析 $\frac{i}{(1+i)^3}=\frac{i}{(1+i)^2(1+i)}=\frac{i}{2i(1+i)}=\frac{1}{2+2i}=\frac{2-2i}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{2-2i}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i.$

2. 答案 D

命题意图 本题考查集合的运算与不等式的解法.

解析 因为 $A=\{x|\sqrt{x}\geqslant 1\}=\{x|x\geqslant 1\}$,$B=\{x|x^2\leqslant 9\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$,则 $A\cup B=[-3,+\infty)$.

3. 答案 B

命题意图 本题考查圆的方程与性质.

解析 作图易知 $\angle BAC=90°$,所以该圆的直径为 $|BC|=\sqrt{(4+2)^2+(-4-4)^2}=10$,所以半径为 5.

4. 答案 A

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析 若 $[x]>[y]$,则必有 $[x]>y\geqslant[y]$,又 $x\geqslant[x]$,所以 $x>y$,充分性成立;若 $x>y$,取 $x=1.2$,$y=1.1$,可知 $[x]=[y]$,所以必要性不成立. 所以“$[x]>[y]$”是“$x>y$”的充分不必要条件.

5. 答案 B

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{10}\right)$的图象向左平移 m 个单位长度后,得到的图象对应函数 $g(x)=\cos\left[3(x+m)-\frac{\pi}{10}\right]=\cos\left(3x+3m-\frac{\pi}{10}\right)$,因为 $y=g(x)$ 的图象关于坐标原点对称,所以 $3m-\frac{\pi}{10}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $m=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{5}(k\in\mathbf{Z})$,因为 $m>0$,故当 $k=0$ 时,m 取得最小值$\frac{\pi}{5}$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查排列组合的应用.

解析 先将 6 名同学分成 4 组:一种方式是甲、乙组成一组,再从另外 4 人中任选 2 人组成一组,其余的一人一组;另一种方式是甲、乙与另外 4 人中的 1 人组成一组,其余的一人一组. 再把 4 组人分到 4 个场馆,所以安排方法种数为 $(C_4^2+C_4^1)A_4^4=240$.

7. 答案 C

命题意图 本题考查简单几何体的结构特征及相关计算.

解析 设 3 个正棱锥的高均为 h,轴截面面积的最大值均为 S. 设正三棱锥的底面边长为 a,当轴截面与底面的一条棱垂直时,轴截面面积最大,所以 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}ah$,可得正三棱锥的体积为 $V_1=\frac{1}{3}Sa=\frac{4\sqrt{3}S^2}{9h}$. 设正四棱锥的底面

对角线长为 $2b$，当轴截面经过底面的一条对角线时，轴截面面积最大，所以 $S=bh$，可得正四棱锥的体积为 $V_2=\frac{2}{3}Sb=\frac{2S^2}{3h}$. 设正六棱锥的底面边长为 c，当轴截面经过底面的两个相对的顶点时，轴截面面积最大，所以 $S=ch$，可得正六棱锥的体积为 $V_3=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2h=\frac{\sqrt{3}S^2}{2h}$. 所以正三棱锥、正四棱锥、正六棱锥的体积之比为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}:\frac{2}{3}:\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $1:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{9}{8}$.

8. **答案** A

命题意图 本题考查和角的正切公式的应用.

解析 因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$，所以 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1+(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$，所以 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)\leqslant\left(\frac{1+\tan\alpha+1+\tan\beta}{2}\right)^2$，即 $2\leqslant\frac{(\tan\alpha+\tan\beta+2)^2}{4}$，得 $(\tan\alpha+\tan\beta+2)^2\geqslant8$，显然 $\tan\alpha+\tan\beta+2>0$，所以 $\tan\alpha+\tan\beta+2\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $\tan\alpha=\tan\beta=\sqrt{2}-1$ 时等号成立，所以 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案** AD

命题意图 本题考查样本的平均数与方差.

解析 根据方差的意义，可知去掉最大值和最小值都可以使样本数据的方差变小，故 x_1 和 x_{10} 符合条件；去掉 x_5，样本平均数不变，则根据方差的计算公式可知方差变大，故 x_5 不符合条件；去掉 x_6，样本方差的变化情况无法确定，也不符合条件.

10. **答案** BCD

命题意图 本题考查函数的性质综合.

解析 对于 A，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，当 $x<0$ 时，$0<e^x<1$，则 $f(x)>0$，当 $x>0$ 时，$e^x>1$，则 $f(x)<0$，显然 $f(x)$ 在定义域上不是单调递增，故 A 错误；

对于 B，令 $f(x)=0$，得 $e^x=0$，无解，所以 $f(x)$ 没有零点，故 B 正确；

对于 C，求导得 $f'(x)=\frac{e^x}{(1-e^x)^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=0$，无解，所以不存在平行于 x 轴且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线，故 C 正确；

对于 D，$f(-x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}$，注意到 $f(x)+f(-x)=-1$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ 中心对称，故 D 正确.

11. **答案** AC

命题意图 本题考查空间位置关系的判断.

解析 对于 A，因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $BB_1P\perp$ 平面 $ABCD$，故 A 正确；

对于 B，当点 P 与 C_1 重合时，BP 取最小值 $2\sqrt{2}$，故不存在点 P，使 $BP=2$，故 B 错误；

对于 C，当点 P 与 C_1 重合时，直线 B_1P 与 BD_1 所成角等于 $\angle BD_1A_1$，$\cos\angle BD_1A_1=\frac{A_1D_1}{BD_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当点 P 与 D_1 重

合时，直线 B_1P 与 BD_1 所成角等于 $\angle BD_1B_1$，$\cos\angle BD_1B_1=\frac{B_1D_1}{BD_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以直线 B_1P 与 BD_1 所成角的余弦值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$，而 $\frac{2}{3}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$，故 C 正确；

对于 D，当点 P 与 D_1 重合时，点 A,C 到平面 BB_1P 的距离之和最大，最大值为 $AC=2\sqrt{2}<3$，故不存在满足条件的点 P，故 D 错误.

12. **答案** ACD

命题意图 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 对于 A，由对称性可知 AC 和 BD 是圆 O 的两条直径，所以 $|AC|=|BD|=12$，故 A 正确；

对于 B，由条件得 $\cos\angle AOD=\cos 2\angle AOF=2\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-1=\frac{7}{9}$，而 $\angle AOD$ 与 $\angle AOB$ 互补，所以 $\cos\angle AOB=-\cos\angle AOD=-\frac{7}{9}$，故 B 错误；

对于 C，由已知得 $\sin\angle AOD=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|AC|\times|BD|\sin\angle AOD=32\sqrt{2}$，故 C 正确；

对于 D，记双曲线的半焦距为 $c(c>0)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x^2+y^2=a^2+b^2=c^2,\end{cases}$ 解得 $y=\pm\frac{c^2-a^2}{c}$，则 $\sin\angle AOF=\frac{c^2-a^2}{c^2}$，再由已知可得 $\sin\angle AOF=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{c^2-a^2}{c^2}=\frac{1}{3}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 4

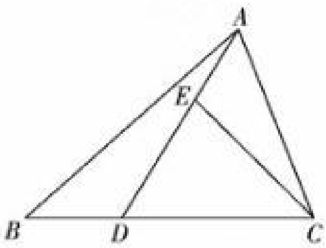
命题意图 本题考查抛物线的方程与性质.

解析 把 $y=4$ 代入抛物线方程 $y^2=2px(p>0)$，得 $M\left(\frac{8}{p},4\right)$，根据抛物线的定义有 $|MF|=\frac{p}{2}+\frac{8}{p}=4$，解得 $p=4$.

14. **答案** 2

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 如图所示，由题意知 $\overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}y\overrightarrow{CD}$，因为 A,E,D 三点共线，所以 $x+\frac{3}{2}y=1$，所以 $2x+3y=2$.



15. **答案** 5

命题意图 本题考查递推数列.

解析 由$\begin{cases}a_3=3a_2+2,\\a_3+a_2=22,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_2=5,\\a_3=17,\end{cases}$又$a_2=3a_1+2$,所以$a_1=1$. 另一方面由$a_{n+1}=3a_n+2$,可得$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$,所以$\{a_n+1\}$是首项为$a_1+1=2$,公比为3的等比数列,所以$a_n=2\times3^{n-1}-1$,易知$\{a_n\}$是递增数列,又$a_4=2\times27-1=53$,$a_5=2\times81-1=161$,所以满足$a_n>160$的最小正整数$n=5$.

16. **答案** $(\ln3,+\infty)$

命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 由题意,对任意$x\in\mathbf{R}$,都有$f'(x)>-f(x)$成立,即$f'(x)+f(x)>0$. 构造函数$g(x)=e^xf(x)$,则$g'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x=e^x[f'(x)+f(x)]>0$,所以函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. 不等式$f(x)>\frac{1}{e^x}$即$e^xf(x)>1$,即$g(x)>1$. 因为$f(\ln3)=\frac{1}{3}$,所以$g(\ln3)=e^{\ln3}f(\ln3)=3\times\frac{1}{3}=1$. 故当$x>\ln3$时,$g(x)>g(\ln3)=1$,所以不等式$g(x)>1$的解集为$(\ln3,+\infty)$,即所求的$x$的取值范围为$(\ln3,+\infty)$.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)在$\triangle ACD$中,由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin D}$,即$\frac{3}{\sin\angle CAD}=\frac{4}{\sin60^\circ}$, ………………(2分)

所以$\sin\angle CAD=\frac{3\sqrt3}{8}$. ………………(3分)

由题设知$\angle CAD<90^\circ$,所以$\cos\angle CAD=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt3}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{37}}{8}$. ………………(5分)

(Ⅱ)由题设及(Ⅰ)知,$\cos\angle BAC=\sin\angle CAD=\frac{3\sqrt3}{8}$, ………………(7分)

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\angle BAC=\frac{75}{4}+16-2\times\frac{5\sqrt3}{2}\times4\times\frac{3\sqrt3}{8}=\frac{49}{4}$, ………………(9分)

所以$BC=\frac{7}{2}$. ………………(10分)

18. **命题意图** 本题考查等差数列的性质以及数列求和.

解析 (Ⅰ)设$\{a_n\}$的公差为$d(d>0)$.

因为$S_5=5a_3=85$,所以$a_3=17$, ………………(2分)

由$a_6=7a_1$得$17+3d=7(17-2d)$,解得$d=6$, ………………(3分)

所以$a_1=5$,$a_n=a_3+(n-3)d=17+(n-3)\times6=6n-1$, ………………(5分)

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(5+6n-1)}{2}=3n^2+2n$. ………………(7分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得,$b_n=\frac{5}{a_na_{n+1}}=\frac{5}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n+5}\right)$, ………………(9分)

所以$T_n=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{6n-7}-\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n+5}\right)$

$=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6n+5}\right)=\frac{n}{6n+5}$. ………………(12分)

解析 （Ⅰ）在$\triangle ABC$中，因为E,F分别是BC,AC的中点，

所以$AB /\!/ EF$. ……（1分）

因为$AC /\!/ A_1C_1, AF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}A_1C_1=DC_1$，

所以四边形AFC_1D为平行四边形，所以$AD /\!/ FC_1$， ……（3分）

又因为$AD\cap AB=A, FE\cap FC_1=F$， ……（4分）

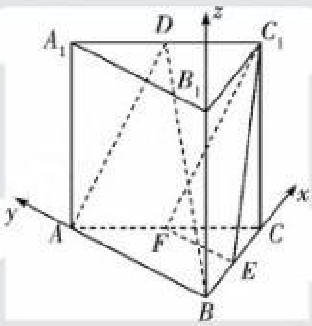
所以平面$ABD /\!/$平面FEC_1. ……（5分）

（Ⅱ）因为$AC=2, CB=1, \angle ACB=60°$，由余弦定理可得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB=3$，

所以$AB^2+BC^2=AC^2$，从而$AB\perp BC$.

以B为坐标原点，$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BB_1}$的方向分别为$x$轴，$y$轴，$z$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$B-xyz$.

……（6分）



故$B(0,0,0), A(0,\sqrt{3},0), D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right), C(1,0,0)$.

从而$\overrightarrow{BA}=(0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right), \overrightarrow{AC}=(1,-\sqrt{3},0)$. ……（7分）

设平面ABD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+2z=0,\end{cases}$ ……（9分）

取$x=4$，则$\boldsymbol{n}=(4,0,-1)$为平面ABD的一个法向量， ……（10分）

所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{\sqrt{17}\times 2}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$， ……（11分）

所以直线AC与平面ABD所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{17}}{17}$. ……（12分）

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质，椭圆与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）由$F(2,0)$得C的半焦距为$c=2$， ……（1分）

所以$a^2=b^2+4$， ……（2分）

又C过点$(2,3)$，

所以$\frac{4}{b^2+4}+\frac{9}{b^2}=1$，解得$b^2=12$， ……（3分）

所以$a^2=16, a=4$， ……（4分）

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$P(8,y_0)$.

由题意可得直线 MN 的方程为 $y=x-2$, ……(6分)

联立$\begin{cases} y=x-2, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1, \end{cases}$ 消去 y 可得 $7x^2-16x-32=0$,

则 $x_1+x_2=\frac{16}{7}$,$x_1x_2=-\frac{32}{7}$, ……(7分)

则 $k_{PM}+k_{PN}=\frac{y_0-y_1}{8-x_1}+\frac{y_0-y_2}{8-x_2}=\frac{(y_0-x_1+2)(8-x_2)+(y_0-x_2+2)(8-x_1)}{(8-x_1)(8-x_2)}$ ……(8分)

$=\frac{16y_0+32+2x_1x_2-(y_0+10)(x_1+x_2)}{64+x_1x_2-8(x_1+x_2)}$

$=\frac{16y_0+32+2\left(-\frac{32}{7}\right)-\frac{16}{7}(y_0+10)}{64-\frac{32}{7}-8\times\frac{16}{7}}$ ……(9分)

$=\frac{y_0}{3}$, ……(10分)

又 $k_{PF}=\frac{y_0-0}{8-2}=\frac{y_0}{6}$, ……(11分)

因此 $k_{PM}+k_{PN}=2k_{PF}$. ……(12分)

21. **命题意图** 本题考查相互独立事件的概率计算以及随机变量的期望.

解析 (Ⅰ)由题意知$f(p)=3p^2(1-p)$,$0<p<1$, ……(1分)

则$f'(p)=-9p^2+6p=3p(2-3p)$,

当$0<p<\frac{2}{3}$时,$f'(p)>0$,当$\frac{2}{3}<p<1$时,$f'(p)<0$,

所以当$p=\frac{2}{3}$时,$f(p)$取最大值,即$p_0=\frac{2}{3}$. ……(4分)

(Ⅱ)(ⅰ)小李第一次考试3个科目都合格的概率为$P_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, ……(5分)

小李第一次考试有2个科目合格,补考1个科目且合格的概率为$P_2=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$, ……(6分)

小李第一次考试有1个科目合格,补考2个科目且均合格的概率为$P_3=3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{81}$,

……(7分)

所以小李这项资格考试过关的概率为$P=P_1+P_2+P_3=\frac{56}{81}$. ……(8分)

(ⅱ)X的所有可能取值为60,80,100, ……(9分)

则$P(X=60)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3}$,$P(X=80)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(X=100)=3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$, ……………………………………………… (11 分)

故 $E(X)=60\times\frac{1}{3}+80\times\frac{4}{9}+100\times\frac{2}{9}=\frac{700}{9}$. ……………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)当 $x\in(0,\pi)$ 时, $\sin x>0$, 所以由 $\frac{me^x}{\sin x}\geqslant 1$, 可得 $m\geqslant\frac{\sin x}{e^x}$.

令 $g(x)=\frac{\sin x}{e^x}$, 则 $g'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$, ……………………………………………… (1 分)

令 $g'(x)=0$, 则 $\sin x=\cos x$, 而 $x\in(0,\pi)$, 得 $x=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………… (2 分)

故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $g'(x)>0$, 当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 时, $g'(x)<0$, ……………………………… (3 分)

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 上单调递减,

故 $[g(x)]_{\max}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$, ……………………………………………… (4 分)

所以 m 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}},+\infty\right)$. ……………………………………… (5 分)

(Ⅱ)易知 $f(x)\neq 0$, 所以 $f(x_1)=f(x_2)$, 等价于 $\frac{1}{f(x_1)}=\frac{1}{f(x_2)}$, 等价于 $g(x_1)=g(x_2)$. ………… (6 分)

不妨设 $x_1<x_2$, 由(Ⅰ)可知 $0<x_1<\frac{\pi}{4}<x_2$.

要证 $x_1+x_2>\frac{\pi}{2}$, 即证 $x_2>\frac{\pi}{2}-x_1>\frac{\pi}{4}$, 又因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 上单调递减, 所以需证 $g(x_2)<g\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$, 即 $g(x_1)<g\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$. ……………………………………………… (8 分)

令 $h(x)=g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,

则 $h'(x)=g'(x)+g'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}+\frac{\sin x-\cos x}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}$

$=(\cos x-\sin x)\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}\right)$, ……………………………………………… (10 分)

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\cos x-\sin x>0$, $\frac{1}{e^x}>\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}$, 所以 $h'(x)>0$,

则 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 所以 $h(x_1)<h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, 即 $g(x_1)<g\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$,

因此, $x_1+x_2>\frac{\pi}{2}$. ……………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。