泉州市2020届高三毕业班适应性线上测试（一）

理科数学试题答案及评分参考

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分（**思想方法分**），但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

一、单项选择题：本题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B　2．C　3．B　4．A　5．D

6．B　7．C　8．A　9．B　10．C

1．【解析】$A=\{x|x(x-3)<0\}=\{x|0<x<3\}$，$B=\{x|x\geq 2\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<2\}$，

则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|0<x<3\}\cap\{x|x<2\}=\{x|0<x<2\}$，故答案选B.

2．【解析】复数 $z=\dfrac{(1+i)^2}{1-2i}=\dfrac{2i}{1-2i}=\dfrac{-4+2i}{5}$，$|z|=\sqrt{(\dfrac{-4}{5})^2+(\dfrac{2}{5})^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

则复数 z 的模为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故答案选C.

3．【解析】①设 $A_i(x_i,\ y_i)$，则 $V_i=\dfrac{y_i}{x_i}$，即直线 OA_i 的斜率，

由图可知，直线 OA_2 的斜率最小，即 V_2 最小；

②根据峰值的一半对应关系得三个点从左到右依次对应 A_1,A_3,A_2 在首次降到峰值一半时对应点，不妨记为 B_1,B_3,B_2，由图可知 A_2 到 B_2 经历的时间最长，

所以 T_1,T_2,T_3 中最大的是 T_2.　　故答案选B.

4．【解析】由 a_1，a_2，a_4 成等比数列得 $a_2^2=a_1a_4$ 即 $(a_1+3)^2=a_1(a_1+9)$ 解得 $a_1=3$，

$S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}\times d=10\times 3+45\times 3=165$．　故答案选A.

5．【解析】法一：$(2x+1)^5=\left(2(x+1)-1\right)^5$，通项$\mathrm{T}_{r+1}=C_5^r\left(2(x+1)\right)^{5-r}(-1)^r$，

故当$r=1$时，$\mathrm{T}_{1+1}=C_5^1\left(2(x+1)\right)^{5-1}(-1)^1=-80(x+1)^4$，所以$a_4=-80$．

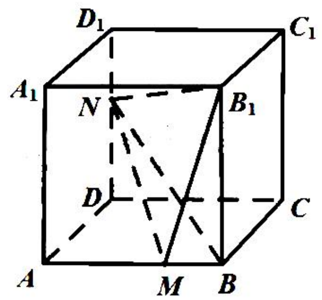
法二：令$t=x+1$,则$x=t-1$，$2x+1=2t-1$，

$(2x+1)^5=(2t-1)^5=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5$，

$\mathrm{T}_{1+1}=C_5^1(2t)^{5-1}(-1)^1=-80t^4$，所以$a_4=-80$．

6．【解析】依题意可得，$f(0)=f(2)=8,f'(0)=-f'(2)=-12$，故切线为：$y=-12x+8$，选B．

7．【解析】由题意$f(x)$在R上是递增函数，所以$\begin{cases}b\ge 0\\ |b|+2\ge 3^0+2b\end{cases}$，解得$0\le b\le 1$．



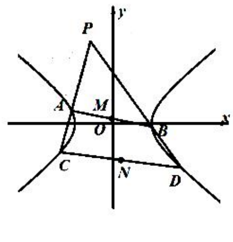
8．【解析】如图所示：正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的边长为3，M,N分别为AB,DD_1的三等分点，且

$BM=D_1N=1$．三棱锥$N-B_1MB$即为所求三棱锥，$V=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times1\times3)\times3=\frac{3}{2}$，　故选A．

9．【解析】选B．因为$\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c^2}{5}$，由正弦定理得$\frac{c}{a}=\frac{c^2}{5},ac=5$，又因为$(a-c)^2-b^2+4=0$，

所以$a^2+c^2-b^2=2ac-4=6$，

代入$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2]}=\sqrt{\frac{1}{4}(5^2-3^2)}=2$．



10．【解析】如图

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段AB的中点$M(x_M,y_M)$，

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_M}{y_M}=-\frac{1}{8}$，

$\therefore y_M=-\dfrac{8b^2}{a^2}\cdot x_M$ …①

设$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，线段CD的中点$N(x_N,y_N)$，

同理可得：$y_N=-\dfrac{8b^2}{a^2}\cdot x_N$ …②

$\because k_{AB}=k_{CD}$ $\quad\therefore AB//CD$，易知P,M,N三点共线，

$\therefore \dfrac{y_M-2}{x_M+1}=\dfrac{y_N-2}{x_N+1}$，将①②代入得：$\dfrac{-\dfrac{8b^2}{a^2}\cdot x_M-2}{x_M+1}=\dfrac{-\dfrac{8b^2}{a^2}\cdot x_N-2}{x_N+1}$，即$(x_M-x_N)\cdot\left(1-\dfrac{4b^2}{a^2}\right)=0$，

$\therefore a^2=4b^2=4(c^2-a^2)$，即$4c^2=5a^2$，

$\therefore e=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故选$C$.

二、多项选择题：本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

11．**BD** 12．**ABD**

	11 题选项	12 题选项	可得分数
全部正确	BD	ABD	5 分
部分正确	B、D	A、B、D 、A B、A D、BD	3 分

11.【解析】

如图，以水轮所在面为坐标平面，以水轮的轴心O为坐标原点，x轴和y轴分别平行和垂直于水面建立平面直角坐标系，依题意得OP在$t(s)$内所转过的角度为$\dfrac{\pi}{6}$t，则$\angle POx=\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{6}$.

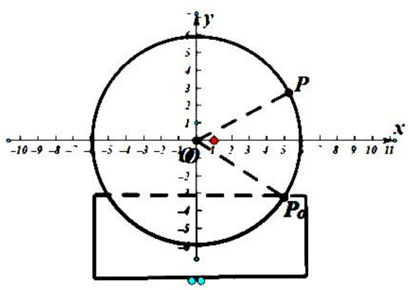
则点P的纵坐标为$y=6\sin(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{6})$，

点P距离水面的高度关于时间$t(s)$的函数

$f(t)=6\sin(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{6})+3$；

$f(3)=6\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})+3=3\sqrt{3}+3$，选项A错误；

$f(1)=6\sin(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6})+3=3$ ，



$f(7)=6\sin(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6})+3=3$，$f(1)=f(7)$，选项 B 正确；

由 $f(t)\geq 6$ 得，，$\sin(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{6})\geq\frac{1}{2}$ 解得 $t\in[2+12k,6+12k](k\in N)$，选项 C 错误；

$f(t)+f(t+4)+f(t+8)=6\sin(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{6})+3+6\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2})+3+6\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{7\pi}{6})+3$ 展开整理

得 $f(t)+f(t+4)+f(t+8)=9$ 为定值，选项 D 正确；故答案为 BD.

12.【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，又 $f(1+x)=f(1-x)$，

所以 $f(x+2)=f(-x)=-f(x)$.

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，可得函数 $f(x)$ 的周期为 4，选项 A 正确；

$f(-2)=-f(2)=-f(0)=0$，即 $f(-2)=f(2)=f(0)$，

又因为函数周期为 4，所以当 n 为偶数时，$f(n)=0$，选项 B 正确；

因为 $f(-1)=-f(1)=-1$，周期 $T=4$，

所以 $f(1)+2^2f(2)+3^2f(3)+\cdots+6^2f(6)=1-3^2+5^2=17$，

所以选项 C 是错的；

$$f(1)+2^2f(2)+3^2f(3)+\cdots+(4n+2)^2f(4n+2)=1-3^2+5^2-7^2+9^2+\cdots+(4n+1)^2$$
$$=1+(5^2-3^2)+(9^2-7^2)+\cdots+\left[(4n+1)^2-(4n-1)^2\right]$$
$$=1+2\left[3+5+7+9+\cdots+(4n-1)+(4n+1)\right]$$
$$=1+2\times\frac{2n(3+4n+1)}{2}=1+2n(4n+4)=8n^2+8n+1$$

所以选项 D 是正确的.　故选 ABD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．将答案填在答题卡的相应位置。

13．$\frac{8}{5}$　　14．9

15．$y^2=4x$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$　**（本小题第一空 2 分，第二空 3 分.）**　16．$\frac{3}{4}$

13.【解析】$\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\lambda-2，\lambda-1)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,2)$，所以，$3(\lambda-2)+2(\lambda-1)=0$，$\lambda=\frac{8}{5}$.

14.【解析】由 $\frac{a_{n+1}^2}{a_n}=6a_n+a_{n+1}$ 可得：$a_{n+1}^2-a_{n+1}a_n-6a_n^2=0$，即 $(a_{n+1}-3a_n)(a_{n+1}+2a_n)=0$，

因为$a_n>0$，所以$a_{n+1}=3a_n$，所以$\{a_n\}$是首项为$a_1>0$，公比为3的等比数列，

所以$\dfrac{a_4+a_7}{a_2+a_5}=\dfrac{a_2q^2+a_5q^2}{a_2+a_5}=q^2=9$.

15.【解析】由已知可得$p=2$，所以C的方程为$y^2=4x$；

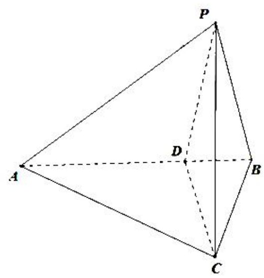
由对称性，不妨设$P(x_0,2\sqrt{x_0})$，因为抛物线$C:y^2=4x$的焦点$F(1,0)$，$A(-1,0)$，

$|PF|=x_0+1$，$|PA|=\sqrt{(x_0+1)^2+(2\sqrt{x_0})^2}=\sqrt{(x_0+1)^2+4x_0}$

$\dfrac{|PF|}{|PA|}=\dfrac{x_0+1}{\sqrt{(x_0+1)^2+4x_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4x_0}{(x_0+1)^2}}}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当$x_0=1$时取等号，

$\dfrac{|PF|}{|PA|}$取最小值$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

16.【解析】



解法一：由已知易得$\triangle PAB$是直角三角形，过P作$PD\perp AB$，垂足为D，易得$PD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$AD=\dfrac{9}{2}$，$BD=\dfrac{3}{2}$. 连接CD，因为平面$PAB\perp$平面ABC，由面面垂直的性质定理，可得$PD\perp$平面ABC，所以$\angle PCD=\theta$，$\tan\theta=\dfrac{PD}{CD}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2CD}$，可知当$CD$取最小值时，$\tan\theta$最大. 设$CD=y$，$CA=x$，则$CB=10-x$.

因为$\angle CDA+\angle CDB=180°$，所以$\cos\angle CDA+\cos\angle CDB=0$，

即$\dfrac{y^2+\left(\dfrac{9}{2}\right)^2-x^2}{2\times\dfrac{9}{2}y}+\dfrac{y^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-(10-x)^2}{2\times\dfrac{3}{2}y}=0$，

所以$y=\sqrt{\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+12}$，当$x=\dfrac{15}{2}$时，$y$取到最小值$2\sqrt{3}$，即$CD$的最小值为$2\sqrt{3}$.

所以$\tan\theta$的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\times2\sqrt{3}}=\dfrac{3}{4}$.

解法二：由已知易得$\triangle PAB$是直角三角形，过P作$PD\perp AB$，垂足为D，易得$PD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，连接CD，因为平面$PAB\perp$平面ABC，由面面垂直的性质定理，可得$PD\perp$平面ABC，所以$\angle PCD=\theta$，

$\tan\theta=\dfrac{PD}{CD}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2CD}$，可知当$CD$取最小值时，$\tan\theta$最大.

由点C到A，B两点的距离和为10，可知点C的轨迹是以A,B为焦点的椭圆E.

设AB的中点为O，以O为原点，AB所在直线为x轴，建立平面直角坐标系，如图所示. 由$|AB|=6$，可得椭圆E的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，

点C在椭圆E上，设$C(x_0,y_0)$，

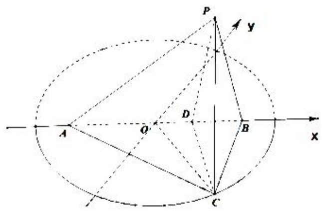
则$\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1$. 由$BD=\frac{3}{2}$，得$D\left(\frac{3}{2},0\right)$.

则$|CD|=\sqrt{\left(x_0-\frac{3}{2}\right)^2+y_0^2}=\sqrt{\left(x_0-\frac{3}{2}\right)^2+16\left(1-\frac{x_0^2}{25}\right)}=\sqrt{\frac{9x_0^2}{25}-3x_0+\frac{73}{4}}\ (-5<x_0<5)$.

$|CD|=\sqrt{\frac{9}{25}(x_0-\frac{25}{6})^2+12}$，

可得当$x_0=\frac{25}{6}$时，$|CD|$取得最小值，最小值为$2\sqrt{3}$.

所以$\tan\theta$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{3}{4}$.



四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. 本小题主要考查解三角形、三角恒等变换等基础知识，考查推理论证能力和运算求解能力等，考查数形结合思想和化归与转化思想等，体现综合性与应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算及数学建模等核心素养的关注. 满分 12 分.

解析：(1) 由$\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin\gamma(2-\cos\alpha-\cos\beta)$得

$\cos\gamma\sin\alpha+\cos\gamma\sin\beta=2\sin\gamma-\sin\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\cos\beta$. ....1 分

整理得$(\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha)+(\cos\gamma\sin\beta+\sin\gamma\cos\beta)=2\sin\gamma$，

即得$\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\beta+\gamma)=2\sin\gamma$. ....3 分

因为在ΔABC中，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，

所以$\sin(\alpha+\gamma)=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$，$\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha$，

所以$\sin\beta+\sin\alpha=2\sin\gamma$. ....4 分

由正弦定理得$CA+CB=2AB$. ....5 分

（2）因为$CA=CB$，$CA+CB=2AB$，

所以$CA=CB=AB$，ΔABC为等边三角形. ....6 分

设$\angle ADC=\varphi$，$\varphi\in(0,\ \pi)$，

则$S_{四边形ABCD}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABC}$

$$=\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}AC^2\sin 60^0$$

$$=\frac{1}{4}\sin\varphi+\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2.$$ ....8 分

在ΔADC中，由余弦定理得

$AC^2=DA^2+DC^2-2DA\cdot DC\cos\angle ADC=\frac{5}{4}-\cos\varphi$. ....9 分

所以$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{4}\sin\varphi+\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{5}{4}-\cos\varphi)$

$$=\frac{1}{4}(\sin\varphi-\sqrt{3}\cos\varphi)+\frac{5\sqrt{3}}{16}$$

$$=\frac{1}{2}\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})+\frac{5\sqrt{3}}{16}.$$ ....10 分

因为$0<\varphi<\pi$，所以$-\frac{\pi}{3}<\varphi-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，

所以$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})\le 1$，得$-\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})\le\frac{1}{2}$. ....11 分

所以$\frac{\sqrt{3}}{16}<\frac{1}{2}\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})+\frac{5\sqrt{3}}{16}\le\frac{8+5\sqrt{3}}{16}$.

因此，四边形$ABCD$面积的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{16},\frac{8+5\sqrt{3}}{16}\right]$. ....12 分

18．本小题考查线面平行、面面垂直的判定与性质、二面角的求解及空间向量的坐标运算等基础知识，考查空间想象能力、逻辑推理及运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想等，体现基础性、综合性与应用性，导向对发展数学抽象、逻辑推理、直观想象等核心素养的关注．

解析：

解法一：（1）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC， $BD\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp BD$． ……………………………………………………………………1 分

在等边 $\triangle ABC$ 中， D 是 AC 的中点，所以 $BD\perp AC$． ……………………………2 分

又 $AA_1\cap AC=A$， 所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1． ………………………………………3 分

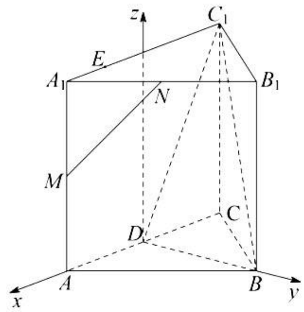
又 $BD\subset$ 平面 BC_1D，所以平面 $BC_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1． ……………………………4 分

（2）取 AA_1 的中点 M， A_1B_1 的中点 N，连接 MN，则点 F 的轨迹就是线段 MN． ……7 分

（回答正确 2 分，作图 1 分）

由图可知当点 F 与点 N 重合时，二面角 C_1-BD-F 的余弦值取到最大值． ………8 分

以 DA、 DB 所在的直线为 x 轴、 y 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$（如图所示）．



则 $D(0,0,0)$， $B(0,2\sqrt{3},0)$，

$C_1(-2,0,4)$， $N(F)(1,\sqrt{3},4)$，

$\overrightarrow{DB}=(0,2\sqrt{3},0)$， $\overrightarrow{DC_1}=(-2,0,4)$，

$\overrightarrow{DF}=(1,\sqrt{3},4)$　　　　9 分

设平面 DBC_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$．

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{DC_1}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2\sqrt{3}y_1=0,\\ -2x_1+4z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=2$，解得 $z_1=1$．

所以 $\vec{m}=(2,0,1)$． 10 分

设平面 DBF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$．

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2\sqrt{3}y_2=0,\\ x_2+\sqrt{3}y_2+4z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=4$，解得 $z_2=-1$．

所以 $\vec{n}=(4,0,-1)$． 11 分

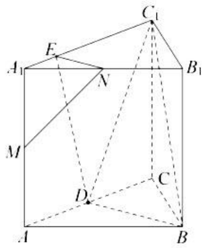
因此$\cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{7}{\sqrt{5}\times\sqrt{17}}=\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

故二面角C_1-BD-F的余弦值的最大值为$\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. ……………………………………… 12 分

解法二：（1）同解法一．　　4 分

（2）取AA_1的中点M，A_1B_1的中点N，连接MN，则点F的轨迹就是线段MN．　7 分

（回答正确 2 分，作图 1 分）



由图可知当点F与点N重合时，

二面角C_1-BD-F的余弦值取到最大值．8 分

连结EN，易得$EN//BD$，

所以二面角C_1-BD-F的余弦值的最大值等于二面角$E-BD-C_1$．9 分

由（1）得$BD\perp$平面ACC_1A_1，所以$BD\perp DE$，$BD\perp DC_1$，

所以$\angle EDC_1$为二面角$E-BD-C_1$的平面角．10 分

在$\triangle EDC_1$中，$EC_1=3$，$ED=\sqrt{17}$，$DC_1=2\sqrt{5}$，

由余弦定理，得$\cos\angle EDC_1=\dfrac{ED^2+DC_1^2-EC_1^2}{2ED\cdot DC_1}=\dfrac{17+20-9}{2\times\sqrt{17}\times2\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

故二面角C_1-BD-F的余弦值的最大值为$\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. ……………………………………… 12 分

19. 本小题主要考查椭圆的几何性质、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等，体现基础性、综合性与创新性，导向对发展逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模等核心素养的关注．满分 12 分．

解析：（1）由题意知，直线AB的斜率存在，且不为 0，设直线AB的方程为$x=ty+1$，…1 分

代入$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，……2 分

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$ ………3 分

若$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,则$y_1=-2y_2$，解得$t=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，……4 分

所以，l的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x-1)$ ………5 分

（2）由（1）得 AB 的中点坐标为 $(\frac{4}{3t^2+4},\frac{-3t}{3t^2+4})$ ……….7 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\times\frac{12\sqrt{1+t^2}}{3t^2+4}=\frac{12(1+t^2)}{3t^2+4}$ …….9 分

因为 M 是 ΔPAB 的外心,所以 M 是线段 AB 的垂直平分线与 AP 的垂直平分线的交点，

AB 的垂直平分线为 $y+\frac{3t}{3t^2+4}=-t(x-\frac{4}{3t^2+4})$

令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{3t^2+4}$，即 $M(\frac{1}{3t^2+4},0)$，

所以，$|MF|=|\frac{1}{3t^2+4}-1|=\frac{3t^2+3}{3t^2+4}$ ….10 分

$\frac{|AB|}{|MF|}=\frac{\frac{12(t^2+1)}{3t^2+4}}{\frac{3t^2+3}{3t^2+4}}=\frac{12}{3}=4$，所以，$\frac{|AB|}{|MF|}$ 为定值. …. …. …. …. …. …. ….12 分

20.本题主要考查离散型随机变量的分布列和数学期望，相互独立事件的概率乘法公式等基础知识，游戏公平的原则，考查应用意识等，考查概率思想、分类讨论思想等，导向对数学建模等核心素养的关注.

【解析】（1）由题意可知，随机变量 X 的可能取值有 3、4、5、6，

$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，$P(X=4)=C_3^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$，

$P(X=5)=C_3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，$P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

所以，随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	3	4	5	6
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

所以，$E(X)=3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{4}{9}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{27}=4$；

（2）依题意，当 $1\le n\le 98$ 时，棋子要到第 $(n+1)$ 站，有两种情况：

由第 n 站跳 1 站得到，其概率为 $\frac{2}{3}P_n$；由第 $(n-1)$ 站跳 2 站得到，其概率为 $\frac{1}{3}P_{n-1}$.

所以，$P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{3}P_{n-1}$.

同时减去 P_n 得 $P_{n+1}+\frac{1}{3}P_n=\left(\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{3}P_{n-1}\right)+\frac{1}{3}P_n=P_n+\frac{1}{3}P_{n-1}\ (1\le n\le 98)$；

（3）依照（2）的分析，棋子落到第99站的概率为 $P_{99}=\frac{2}{3}P_{98}+\frac{1}{3}P_{97}$，

由于若跳到第99站时，自动停止游戏，故有 $P_{100}=\frac{1}{3}P_{98}$.

所以 $P_{100}<P_{99}$，即最终棋子落在第99站的概率大于落在第100站的概率，游戏不公平.

21．本小题主要考查导数的综合应用，利用导数研究函数的单调性、最值和零点等问题，考查抽象概括、推理论证、运算求解能力，考查应用意识与创新意识，综合考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、数形结合思想、有限与无限思想以及特殊与一般思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模等核心素养．满分12分．

解:(1) $f'(x)=(1-x)\left(\frac{a}{e^x}+\frac{1}{x}\right)=\frac{(1-x)\left(a+\frac{e^x}{x}\right)}{e^x}$ 令 $g(x)=a+\frac{e^x}{x}$ ……………………1分

则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，当 $0<x<1, g'(x)<0$，当 $x>0, g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，所以 $g_{\min}(x)=g(1)=a+e$ ……………………3分

因为 $a\ge -1$，所以 $a+e>0$，$g(x)>0$ 恒成立，则当 $f'(x)>0$ 时，$0<x<1$，$f'(x)<0$ 时，$x>1$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，$(1,+\infty)$ 递减，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 唯一极值点……………………4分

所以 $f(x)$ 只有一个极值点……………………5分

（2）因为 $x>0$，不等式可化为 $a\le\frac{(x-\ln x-e)}{x}e^x$ 恒成立，

令 $h(x)=\frac{(x-\ln x-e)}{x}e^x$，只需 $a\le h_{\min}(x)$……………………6分

因为 $h'(x)=\frac{(1-x)(\ln x-x-1+e)}{x^2}e^x$，令 $\varphi(x)=\ln x-x-1+e$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

当 $x\in(0,1), \varphi'(x)>0, x\in(1,+\infty), \varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，$(1,+\infty)$ 递减． ………7分

又 $\varphi\left(\frac{1}{e^2}\right)=e-3-\frac{1}{e^2}<0$，$\varphi(1)=e-2>0$，$\varphi(e)=0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 存在唯一零点 x_0，在 $(1,+\infty)$ 存在唯一零点 $x=e$，……………………8分

当$0<x<x_0$时，$\varphi(x)<0, h'(x)<0$，

当$x_0<x<1$时，$\varphi(x)>0, h'(x)>0$，

当$1<x<e$时，$\varphi(x)>0, h'(x)<0$，

当$x>e, \varphi'(x)<0, h'(x)>0$，

所以$h(x)$在$(0,\ x_0)$和$(1,e)$上为减函数,在$(x_0,1)$和$(e,+\infty)$上为增函数，

所以$h_{\min}(x)$是$h(x_0)$与$h(e)$中较小者，……………………………………9 分

$h(e)=-e^{e-1}$，

因为$\varphi(x_0)=\ln x_0-x_0-1+e=0$，所以$x_0=e^{x_0+1-e}$，

所以$h(x_0)=\dfrac{(x_0-\ln x_0-e)}{x_0}e^{x_0}=-\dfrac{e^{x_0}}{x_0}=-e^{e-1}$ ……………………………………………………………11 分

综上，$h_{\min}(x)=-e^{e-1}$，所以$a\le -e^{e-1}$.

所以，满足题意的a的取值范围是$a\le -e^{e-1}$ ……………………………………………………12 分

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22．选修 4－4：坐标系与参数方程

本小题综合考查直线与圆的参数方程、圆的直角坐标方程与极坐标方程的互化、极坐标的几何含义、面积公式、三角恒等变换及三角函数性质等基础知识，考查推理论证能力与运算求解能力，考查函数与方程思想、转化与化归思想、数形结合思想，体现基础性与综合性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注．满分 10 分．

解：（1）由$\begin{cases}x=4-t\\ y=kt\end{cases}$，消去参数$t$得$l_1$的普通方程$y=k(4-x)$， …………………1 分

设$P(x,y)$，由题意得$\begin{cases}y=k(4-x),\\ y=\dfrac{1}{k}x.\end{cases}$ …………………2 分

消去k得C的普通方程$x^2+y^2-4x=0(y\ne 0)$． ………………3 分

把$x^2+y^2=\rho^2, x=\rho\cos\theta$代入上式，$\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，． ………………4 分

可得C的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$（$\rho\neq0,4$）. ....5 分

（2）由题意可设$A(\rho_1,\theta),B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{4})(\rho_1>0,\rho_2>0)$， ....6 分

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\rho_1\rho_2=4\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ ....7 分

$=4\left(\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta\right)=4\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{2}\right)$

$=2+2\sqrt{2}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$， . ...8 分

所以当$\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即$\theta=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$时， ....9 分

ΔAOB的面积取得最大值，其最大值为$2+2\sqrt{2}$. ....10 分

23．选修4－5：不等式选讲

本小题主要考查绝对值不等式的解法、绝对值的意义、基本不等式等基础知识，考查抽象概括能力、运算求解能力，考查分类与整合的思想，转化与化归的思想，体现基础性与综合性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象及数学建模等核心素养的关注．满分10分．

解:（1）当$x=1$时，$2\geq a\cdot0$恒成立，此时$a\in R$. ....1 分

当$x\neq1$时，原不等式可等价转化为$a\leq\frac{|x-2|+|3x-2|}{|x-1|}$. ....2 分

令$g(x)=\frac{|x-2|+|3x-2|}{|x-1|}$，则原不等式恒成立，只需$a\leq g_{\min}(x)$. ....2 分

因为$g(x)=\frac{|x-2|+|3x-2|}{|x-1|}\geq\frac{|4x-4|}{|x-1|}=4$， ....3 分

当且仅当$x\leq\frac{2}{3}$或$x\geq2$时"="号成立， ....4 分

所以$g_{\min}(x)=4$，即$a\leq4$. ....4 分

综上知，a的最大值$m=4$. ....5 分

（2）由（1）可得$pq-2p-q=2$，即$(p-1)(q-2)=4$. ....6 分

因为$p-1>0$，所以$(q-2)>0$， ....7 分

$p+q=(p-1)+(q-2)+3\geq 2\sqrt{(p-1)(q-2)}+3=7$，……………………………………9 分

当且仅当 $p-1=q-2$，即 $p=3,q=4$ 时"="成立, ……………………………10 分

所以 $p+q$ 的最小值为 7. ……………………………10 分

说明：令 $p+q=t$，转化为求函数 $t=\dfrac{p^2+p+2}{p-1}(p>1)$ 的最小值，或转化为"由关于 p 的二次方程 $p^2+(1-t)p+t+2=0$ 有大于 1 的解，求 t 的最小值"问题，请参照前述解答，酌情相应给分.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

福利：

1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料

2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题