南京市2023届高三年级学情调研

数　学

2022.09

注意事项：

1. 本试卷共6页，包括单项选择题（第1题～第8题）、多项选择题（第9题～第12题）、填空题（第13题～第16题）、解答题（第17题～第22题）四部分。本试卷满分为150分，考试时间为120分钟。

2. 答卷前，考生务必将自己的学校、姓名、考生号填涂在答题卡上指定的位置。

3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置，在其他位置作答一律无效。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上．

1. 设集合 $A=\{x|x^2+x-6<0\}$，$B=\{x|x+1>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-3,-1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-3,+\infty)$

2. 已知复数 $z=(2+i)i$，其中i为虚数单位，则 $z\bar{z}$ 的值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

3. 已知随机变量 $X\sim N(4,2^2)$，则 $P(8<X<10)$ 的值约为

A. 0.0215　　B. 0.1359　　C. 0.8186　　D. 0.9760

附：若 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Y<\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Y<\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma<Y<\mu+3\sigma)\approx0.9974$

4. 若直线 $x+y+a=0$ 与曲线 $y=x-2\ln x$ 相切，则实数 a 的值为

A. 0　　B. -1　　C. -2　　D. -3

5. 阻尼器是一种以提供阻力达到减震效果的专业工程装置．我国第一高楼上海中心大厦的阻尼器减震装置，被称为"镇楼神器"，如图1．由物理学知识可知，某阻尼器的运动过程可近似为单摆运动，其离开平衡位置的位移 y(m)和时间 t(s)的函数关系为 $y=\sin(\omega t+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\pi)$，如图2．若该阻尼器在摆动过程中连续三次到达同一位置的时间分别为 t_1,t_2,t_3 $(0<t_1<t_2<t_3)$，且 $t_1+t_2=2$，$t_2+t_3=6$，则在一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移大于0.5m的总时间为

A. $\frac{1}{3}$s　　B. $\frac{2}{3}$s　　C. 1s　　D. $\frac{4}{3}$s

图 1

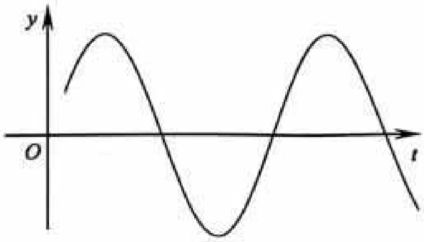


图 2

（第 5 题图）

6. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，左顶点为$A$，上顶点为$B$，点$P$为椭圆上一点，且$PF_2\perp F_1F_2$. 若$AB\parallel PF_1$，则椭圆的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形，P 为上底面圆的圆心，AB 为下底面圆的直径，E 为下底面圆周上一点，则三棱锥 $P-ABE$ 外接球的表面积为

A. $\frac{25\pi}{16}$　　B. $\frac{25\pi}{4}$　　C. $\frac{5\pi}{2}$　　D. 5π

8. 已知函数$f(x)$，对于任意$x,y\in\mathbf{R}$，满足$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$，且$f(1)=2$，$f(2)=0$，则$f(1)+f(2)+\cdots+f(90)$的值为

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，不选或有错选的得 0 分.

9. 已知l,m是两条不同的直线，α,β是两个不同的平面，则下列选项中，“$l\perp m$”的充分条件有

A. $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m\parallel\beta$　　B. $\alpha\parallel\beta,l\parallel\alpha,m\perp\beta$

C. $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m\perp\beta$　　D. $\alpha\perp\beta,l\parallel\alpha,m\parallel\beta$

10. 已知$a>b>0$，则

A. $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$　　B. $a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$

C. $a^3-b^3>2(a^2b-ab^2)$　　D. $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

11. 已知直线$l:x+1=0$，点$P(1,0)$，圆心为M的动圆经过点P，且与直线l相切，则

A. 点M的轨迹为抛物线

B. 圆M面积的最小值为4π

C. 当圆M被y轴截得的弦长为$2\sqrt{5}$时，圆M的半径为 3

D. 存在点M，使得$\frac{MO}{MP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，其中$O$为坐标原点

12. 已知函数$f(x)=3^x-2^x$，$x\in\mathbf{R}$，则

A. $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

B. 存在$a\in\mathbf{R}$，使得函数$y=\dfrac{f(x)}{a^x}$为奇函数

C. 函数$g(x)=f(x)+x$有且仅有2个零点

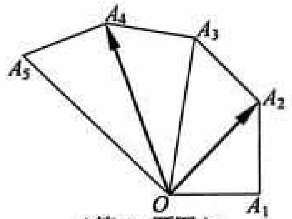
D. 任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)>-1$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13. $(1-\dfrac{1}{x^2})(1+x)^6$的展开式中$x^3$的系数为＿▲＿．

14. 双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$右焦点为F，点P，Q在双曲线上，且关于原点对称．若$PF\perp QF$．则$\triangle PQF$的面积为＿▲＿．

15. 如图是构造无理数的一种方法：线段$OA_1=1$；第一步，以线段OA_1为直角边作直角三角形OA_1A_2，其中$A_1A_2=1$；第二步，以OA_2为直角边作直角三角形OA_2A_3，其中$A_2A_3=1$；第三步，以OA_3为直角边作直角三角形OA_3A_4，其中$A_3A_4=1$；…，如此延续下去，可以得到长度为无理数的一系列线段，如OA_2，OA_3，…，则$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}=$＿▲＿．



（第15题图）

16. 若函数$f(x)=2x-\sin x-a$在$(-\pi,\pi)$上存在唯一的零点x_1，函数$g(x)=x^2+\cos x-ax+a$在$(-\pi,\pi)$上存在唯一的零点x_2，且$x_1<x_2$，则实数a的取值范围为＿▲＿．

四、解答题：本大题共6小题，共70分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分10分）

在平面四边形$ABCD$中，$\angle ABD=45^\circ$，$AB=6$，$AD=3\sqrt{2}$．对角线AC与BD交于点E，且$AE=EC$，$DE=2BE$．

(1)求BD的长；

(2)求$\cos\angle ADC$的值．

18.（本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=6$，$a_2=12$，$a_3=20$，且数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，$n\in N^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

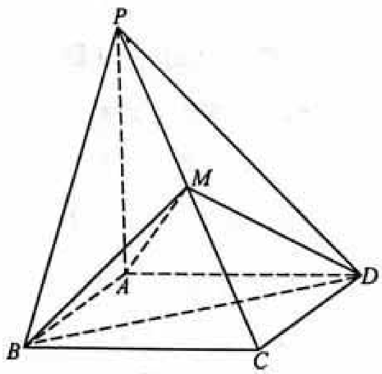
(2)设数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前n项和为S_n，证明：$S_n<\frac{1}{2}$.

19.（本小题满分12分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$PA\perp$平面$ABCD$，M为PC的中点.

(1)求证：$PA//$平面MBD；

(2)若$AB=AD=PA=2$，$\angle BAD=120°$，求二面角$B-AM-D$的正弦值.



（第19题图）

20.(本小题满分 12 分)

某高校男、女学生人数基本相当，为了解该校英语四级考试情况，随机抽取了该校首次参加英语四级考试的男、女各 50 名学生的成绩，情况如下表：

	合格	不合格
男生	35	15
女生	45	5

(1)是否有 99%的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关?

(2)从这 50 名男生中任意选 2 人，求这 2 人中合格人数的概率分布及数学期望；

(3)将抽取的这 100 名学生合格的频率视为该校首次参加英语四级考试的每位学生合格的概率. 若学生首次考试不合格，则经过一段时间的努力，第二次参加考试合格的概率会增加 0.1. 现从该校学生中任意抽取 2 名学生，求至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21.（本小题满分12分）

已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过点$P(0,2)$的动直线l与抛物线相交于A,B两点．当l经过点F时，点A恰好为线段PF中点．

(1)求p的值；

(2)是否存在定点T，使得$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$为常数？若存在，求出点$T$的坐标及该常数；若不存在，说明理由．

22.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=e^{ax}-x,a\in\mathbf{R}$．

(1)若$a>0$，求函数$f(x)$的单调区间；

(2)若任意$x\geqslant0$，$f(x)\geqslant1+\frac{1}{2}ax^2$，求$a$的取值范围．

南京市 2023 届高三年级学情调研

数　学　　2022.09

一. 选择题

1.设集合 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\}$，$B=\{x\mid x+1>0\}$，则 $A\cap B=$

$A.(-3,-1)$　　$B.(-1,2)$　　$C.(2,+\infty)$　　$D.(-3,+\infty)$

【答案】 B

2.已知复数 $z=(2+i)i$，其中 i 为虚数单位，则 $z\bar{z}$ 的值为

$A.\sqrt{3}$　　$B.\sqrt{5}$　　$C.3$　　$D.5$

【答案】 D

3.已知随机变量 $X\sim N(4,2^2)$，则 $P(8<X<10)$ 的值约为

$A.0.0215$　　$B.0.1359$　　$C.0.8186$　　$D.0.9760$

【答案】 A

4.若直线 $x+y+a=0$ 与曲线 $y=x-2\ln x$ 相切，则实数 a 的值为

$A.0$　　$B.-1$　　$C.-2$　　$D.-3$

【答案】 C

5.阻尼器是一种以提供阻力达到减震效果的专业工程装置.我国第一高楼上海中心大厦的阻尼器减震装置，被称为“镇楼神器”，如图 1,.由物理学知识可知，某阻尼器的运动过程可近似为单摆运动，其离开平衡位置的位移 $y(m)$ 和时间 $t(s)$ 的函数关系为 $y=\sin(\omega t+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$，如图 2.若该阻尼器在摆动过程中连续三次到达同一位置的时间分别为 t_1，t_2，$t_3(0<t_1<t_2<t_3)$，且 $t_1+t_2=2$，$t_2+t_3=6$，则在一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移大于 $0.5m$ 的总时间为

$A.\frac{1}{3}s$　　$B.\frac{2}{3}s$　　$C.1s$　　$D.\frac{4}{3}s$

图 1

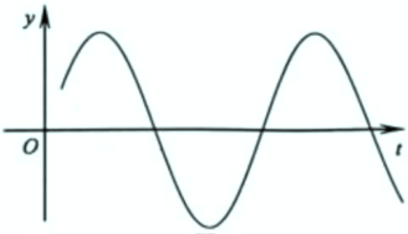


图 2

（第 5 题图）

【答案】D

6.已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，左顶点为 A，上顶点为 B，点 P 为椭圆上一点，且 $PF_2\perp F_1F_2$，若 $AB// PF_1$，则椭圆的离心率为

$A.\frac{\sqrt{5}}{5}$　　$B.\frac{1}{2}$　　$C.\frac{\sqrt{3}}{3}$　　$D.\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

7.已知圆柱的轴截面是边长为2的正方形，P 为上底面圆的圆心，AB 为下底面圆的直径，E 为下底面圆周上一点，则三棱锥 $P-ABE$ 外接球的表面积为

$A.\frac{25}{16}\pi$　　$B.\frac{25}{4}\pi$　　$C.\frac{5}{2}\pi$　　$D.5\pi$

【答案】B

【解析】设外接球半径为 r，则 $r^2=1^2+(2-r)^2$，解得 $r=\frac{5}{4}$，故 $S=4\pi r^2=\frac{25}{4}\pi$.

8.已知函数 $f(x)$，对于任意 x，$y\in R$，满足 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$，且 $f(1)=2$，$f(2)=0$；则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(90)$ 的值为

$A.-2$　　$B.0$　　$C.2$　　$D.4$

【答案】C

【解析】令 $x=y+2$ 得 $f(2y+2)f(2)=f^2(y+2)-f^2(y)$，又 $f(2)=0$，即 $f^2(y+2)=f^2(y)$，

所以 $\forall x\in R$，有 $f^2(x)=f^2(x+2)$，

$\forall x=2k(k\in N^*)$，$f^2(x)=f^2(2)=0\Rightarrow f(2k)=0$，

$\forall x=2k+1(k\in N^*)$，$f^2(x)=f^2(1)=4$，

令 $x=2k+1$，$y=2k$，则 $f(4k+1)f(1)=f^2(2k+1)-f^2(2k)=4\Rightarrow f(4k+1)=2$，

令 $x=2k$，$y=2k-1$，则 $f(4k-1)f(1)=f^2(2k)-f^2(2k-1)=-4\Rightarrow f(4k-1)=-2$，

原式 $=[f(1)+f(5)+\cdots+f(89)]+[f(2)+f(4)+\cdots+f(90)]+[f(3)+f(7)+\cdots+f(87)]$

$=23\times2+0+22\times(-2)$

$=2$

二.多选题

9.已知l，m是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则下列选项中，“$l\perp m$”的充分条件有

$A.\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，$m//\beta$　　$B.\alpha//\beta$，$l//\alpha$，$m\perp\beta$

$C.\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，$m\perp\beta$　　$D.\alpha\perp\beta$，$l//\alpha$，$m//\beta$

【答案】BC

10.已知$a>b>0$，则

$A.\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$　　$B.a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$

$C.a^3-b^3>2(a^2b-ab^2)$　　$D.\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

【答案】AC

【解析】$y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$单调递减，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故A正确；

$a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}\Leftrightarrow a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$，$y=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$上递减，在$(1,+\infty)$递增，故$B$错误；

$a^3-b^3>2(a^2b-ab^2)\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2)>2ab(a-b)\Leftrightarrow a^2-ab+b^2>0$，故$C$正确；

$\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a+1}-\sqrt{a}>\sqrt{b+1}-\sqrt{b}$，

设函数$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故$D$错误；

综上所述，故选AC.

11 已知直线l：$x+1=0$，点$P(1,0)$，圆心为M的动圆经过点P，且与直线l相切，则

$A.$点M的轨迹为抛物线

$B.$圆M面积的最小值为4π

$C.$当圆M被y轴截得的弦长为$2\sqrt{5}$时，圆M的半径为3

$D.$存在点M，使得$\frac{MO}{MP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。其中$O$为坐标原点

【答案】 ACD

【解析】 M 到直线 l 的距离与到点 P 的距离相等，则 M 的轨迹为抛物线，故 A 正确；

当 M 为 $(1,1)$ 时，半径最小，圆面积最小，此时面积为 π，故 B 错误；

设 $M(x_0, y_0)$，则半径 $r = x_0 + 1$，

弦长为 $2\sqrt{r^2 - x_0^2} = 2\sqrt{2x_0 + 1} = 2\sqrt{5}$，解得 $x_0 = 2$，$r = 2 + 1 = 3$，故 C 正确；

设 $M(x_0, y_0)$，M 轨迹方程为 $y^2 = 4x \Rightarrow x_0 = \dfrac{y_0^2}{4}$

$|OM| = \sqrt{(\dfrac{y_0^2}{4})^2 + y_0^2} = \dfrac{y_0}{4}\sqrt{y_0^2 + 16}$，$|PM| = x_0 + 1 = \dfrac{y_0^2}{4} + 1$，

$\dfrac{|OM|}{|PM|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3y_0^2(y_0^2 + 16) = 4(y_0^2 + 4)^2 \Rightarrow y_0 = \pm 2\sqrt{2}$，即存在 M，故 D 正确；

综上所述，故选 ACD.

12. 已知函数 $f(x) = 3^x - 2^x$，$x \in R$，则

$A.\ f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$B.$ 存在 $a \in R$，使得函数 $y = \dfrac{f(x)}{a^x}$ 为奇函数

$C.$ 函数 $g(x) = f(x) + x$ 有且仅有 2 个零点

$D.$ 任意 $x \in R$，$f(x) > -1$

【答案】 ABD

【解析】 $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2^x \ln 2 > (\ln 3 - \ln 2)2^x > 0$，故 A 正确；

$a = \sqrt{6}$ 时，$y = \dfrac{f(x)}{(\sqrt{6})^x} = (\sqrt{\dfrac{3}{2}})^x - (\sqrt{\dfrac{3}{2}})^{-x}$ 为奇函数，故 B 正确；

$g(x) = 3^x - 2^x + x$，当 $x < 0$ 时，$g'(x) = 3^x \ln 3 - 2^x \ln 2 + 1 > 0 - \ln 2 + 1 > 0$

当 $x \ge 0$ 时，$g'(x) > (\ln 3 - \ln 2)2^x + 1 > 0$

$g(x)$ 在 R 上单调递增，至多一个零点，故 C 错误；

当 $x \ge 0$ 时，$f(x) = 3^x - 2^x \ge 0$

当 $x < 0$ 时，$f(x) = 3^x - 2^x > 0 - 2^x > 0 - 1 = -1$，故 D 错误

综上所述，故选 ABD.

三.填空题

13.$(1-\frac{1}{x^2})(1+x)^8$ 的展开式中 x^3 的系数为__________.

【答案】14

【解析】$(\cdots+6x^5+\cdots+20x^3)(1-\frac{1}{x^2})=20x^3-6x^3=14x^3$.

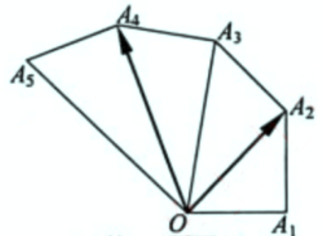
14.双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 右焦点为 F，点 P，Q 在双曲线上，且关于原点对称.若 $PF\perp QF$，则 ΔPQF 的面积为_____.

【答案】4

【解析】设 P 在第一象限，$|PF|=m,|QF|=m+2,|PQ|=2|QF|=2\sqrt{5}$

$$m^2+(m+2)^2=20\Rightarrow m=2\Rightarrow S=\frac{1}{2}|PF||QF|=4.$$

15. 如图是构造无理数的一种方法：线段 $OA_1=1$；第一步，以线段 OA_1 为直角边作直角三角形 OA_1A_2，其中 $A_1A_2=1$；第二步，以 OA_2 为直角边作直角三角形 OA_2A_3，其中 $A_2A_3=1$；第三步，以 OA_3 为直角边作直角三角形 OA_3A_4，其中 $A_3A_4=1$；…，如此延续下去，可以得到长度为无理数的一系列线段，如 $OA_2,OA_3,\cdots$，则 $\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}=$___▲___.



（第 15 题图）

【答案】$2-\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】由题意得 $|\overrightarrow{OA_3}|=\sqrt{3},|\overrightarrow{OA_2}|=\sqrt{2}$，设 $\angle OA_3A_2=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}=(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3A_2})(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3A_4})=|\overrightarrow{OA_3}|^2+\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}\ \overrightarrow{A_3A_2}$$

$$=3+0++|\overrightarrow{OA_3}|\cdot|\overrightarrow{A_3A_2}|\cos(\pi-\theta)+|\overrightarrow{A_3A_4}|\cdot|\overrightarrow{A_3A_2}|\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$$

$$=3+\sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{3})+1\cdot1\cdot(-\frac{\sqrt{6}}{3})$$

$$=2-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

16. 若函数 $f(x)=2x-\sin x-a$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上存在唯一的零点 x_1，函数 $g(x)=x^2+\cos x-ax+a$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上存在唯一的零点 x_2，且 $x_1<x_2$，则实数 a 的取值范围为___▲___.

【答案】$(-2\pi,-\pi+1)$

【解析】$f'(x)=2-\cos x>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 上单调递增，又存在唯一零点 x_1，

$$\begin{cases} f(-\pi)<0 \\ f(\pi)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\pi-a<0 \\ 2\pi-a>0 \end{cases} \Rightarrow -2\pi<a<2\pi$$

$f(x)=g'(x)$， $g(x)$ 在 $(-\pi,\ x_1)$ 上单调递减，$(x,\ \pi)$ 上单调递增，又 $x_1<x_2$，

所以 $\begin{cases} g(-\pi)<0 \\ g(\pi)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi^2-1+a(\pi+1)\le 0 \\ \pi^2-1+a(1-\pi)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\le 1-\pi \\ a<1+\pi \end{cases} \Rightarrow a\le 1-\pi$

综上所述，a 的取值范围为 $(-2\pi,-\pi+1]$

四.解答题

17.（本小题满分 10 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=45°$，$AB=6$，$AD=3\sqrt{2}$．对角线 AC 与 BD 交于点 E，且 $AE=EC$，$DE=2BE$.

(1)求 BD 的长；

(2)求 $\cos\angle ADC$ 的值.

【解析】(1)在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABD=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot \mathrm{BD}}$，

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{36+BD^2-18}{12BD}$，解得 $BD=3\sqrt{2}$；

(2)由已知得 $AD=BD$，所以 $\triangle ADB$ 为等腰直角三角形

因为 $DE=2BE$，所以 $DE=2\sqrt{2}$

在直角三角形 ADE 中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{26}$，且 $\cos\angle \mathrm{DEA}=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

因为 $AE=EC$，所以 $EC=\sqrt{26}$，且 $\cos\angle \mathrm{DEC}=-\cos\angle \mathrm{DEA}=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

在三角形 DEC 中，由余弦定理得 $DC^2=DE^2+CE^2-2DE\cdot CE\cdot\cos\angle DEC$

解得 $DC=5\sqrt{2}$

在三角形 ACD 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$

解得 $\cos\angle ADC=-\dfrac{3}{5}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=6$，$a_2=12$，$a_3=20$，且数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{\dfrac{1}{a_n}\}$的前n项和为S_n，证明：$S_n<\dfrac{1}{2}$.

【解析】(1) 设等差数列的公差为 d，由题意可知 $d=(a_3-a_2)-(a_2-a_1)=2$

所以 $a_{n+1}-a_n=6+2(n-1)=2n+4$

所以 $n\geq 2$ 时，$(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)=(2n+2)+2n+\ldots+6$

化简得 $a_n=n^2+3n+2$

经验证 $n=1$ 时也满足上式，所以 $n\geq 1, n\in N^*$ 时，$a_n=n^2+3n+2$；

(2) $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

所以 $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$

因为 $n\geq 1$，所以 $\dfrac{1}{n+2}>0$，所以 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{2}$

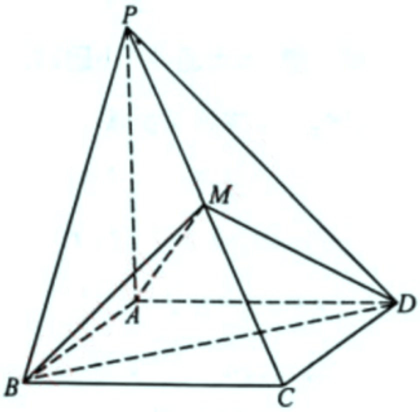
即 $S_n<\dfrac{1}{2}$.

19.(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$PA\perp$平面 $ABCD$，M 为 PC 的中点.

(1)求证：$PA\parallel$平面 MBD；

(2)若 $AB=AD=PA=2$，$\angle BAD=120°$，求二面角 $B-AM-D$ 的正弦值.



【解析】（1）连接 AC ，设 $AC\cap BD=N$ ，再连接 MN

因为 $ABCD$ 为平行四边形，所以 N 是 AC 中点

因为 M,N 分别是 PC,AC 中点，所以 $MN\parallel PA$

因为 $MN\parallel PA$ ， $MN\subset$ 面MBD ， $PA\not\subset$ 面MBD

所以 $PA\parallel$ 面MBD ；

（2）由题意得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $BN=\sqrt{3},AN=1$ ，由（1）可得 $MN=\dfrac{PA}{2}=1$

因为 $PA\perp$ 面ABCD ， $AC\subset$ 面ABCD ，所以 $PA\perp AC$ ，

又因为 $PA\parallel MN$ ，所以 $MN\perp$ 面$ABCD$ ，又因为 $BD\subset$ 面ABCD ，所以 $MN\perp BD$ ，

所以在直角三角形 PAC 中可得 $AM=\sqrt{2}$ ，在直角三角形 BMN 中可得 $BM=2$

同理可得 $DM=2$

设 AM 中点为 G ，因为 $BA=BM=2$ 所以 $BG\perp AM$ ， $BG=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

同理可得 $DG\perp AM$ ， $DG=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

所以 $\angle BGD$ 即为二面角 $B-AM-D$

在 $\triangle BGD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BGD=\dfrac{BG^2+DG^2-BD^2}{2BG\cdot DG}=-\dfrac{5}{7}$

所以 $\sin\angle BGD=\sqrt{1-\cos^2\angle BGD}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

答：二面角 $B-AM-D$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

20.（本小题满分 12 分）

某高校男、女学生人数基本相当，为了解该校英语四级考试情况，随机抽取了该校首次参加英语四级考试的男、女各 50 名学生的成绩，情况如下表：

	合格	不合格
男生	35	15
女生	45	5

(1)是否有 99%的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关？

(2)从这 50 名男生中任意选 2 人，求这 2 人中合格人数的概率分布及数学期望；

(3)将抽取的这 100 名学生合格的频率视为该校首次参加英语四级考试的每位学生合格的概率. 若学生首次考试不合格，则经过一段时间的努力，第二次参加考试合格的概率会增加 0.1. 现从该校学生中任意抽取 2 名学生，求至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【解析】（1）由题意 $K^2=\dfrac{100\cdot(35\cdot5-45\cdot15)^2}{50\cdot50\cdot20\cdot80}=6.25<6.635$

答：不能有 99%的把握认为该校首次参加英语四级考试的学生能否合格与性别有关；

（2）设 X 为这 2 人中合格人数，则

$P(X=0)=\dfrac{C_{15}^2}{C_{50}^2}=\dfrac{105}{1225}$，$P(X=1)=\dfrac{C_{15}^1C_{35}^1}{C_{50}^2}=\dfrac{525}{1225}$，$P(X=0)=\dfrac{C_{35}^2}{C_{50}^2}=\dfrac{595}{1225}$

X	0	1	2
P	$\dfrac{105}{1225}$	$\dfrac{525}{1225}$	$\dfrac{595}{1225}$

所以 $E(X)=0\cdot\dfrac{105}{1225}+1\cdot\dfrac{525}{1225}+2\cdot\dfrac{595}{1225}=1.4$；

（3）由题意得该校首次参加英语四级考试的每位学生合格的概率为 0.8

设至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的事件为 A，则

$P(A)=(0.8)^2+C_2^1\cdot0.8\cdot0.2\cdot0.9+(0.2)^2\cdot(0.9)^2=0.9604$

答：至多两次英语四级考试后，这两人全部合格的概率为 0.9604.

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过点$P(0,2)$的动直线l与抛物线相交于A，B两点.当l经过点F时，点A恰好为线段PF中点.

（1）求p的值；

（2）是否存在定点T，使得$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$为常数？若存在，求出点$T$的坐标及该常数；若不存在，说明理由.

【解析】（1）由题意知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，即当$A$为PF中点时坐标为$\left(\frac{p}{4},1\right)$

因为A在抛物线上，所以有$1=2p\cdot\frac{p}{4}$，即$p=\sqrt{2}$；

（2）假设存在定点T满足题意，设$T(m,n)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由题意直线l斜率存在，所以设$l:y=kx+2$

$$\begin{cases}y=kx+2\\y^2=2\sqrt{2}x\end{cases}\Rightarrow k^2x^2+\left(4k-2\sqrt{2}\right)x+4=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2\sqrt{2}-4k}{k^2}\\x_1x_2=\dfrac{4}{k^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+4=\dfrac{k\left(2\sqrt{2}-4k\right)}{k^2}+4\\y_1y_2=k^2x_1x_2+2k\left(x_1+x_2\right)+4=8+\dfrac{2k\left(2\sqrt{2}-4k\right)}{k^2}\end{cases}$$

所以$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=\left(x_1-m\right)\left(x_2-m\right)+\left(y_1-n\right)\left(y_2-n\right)$

$$=x_1x_2+y_1y_2-m\left(x_1+x_2\right)-n\left(y_1+y_2\right)+m^2+n^2$$

$$=\frac{4}{k^2}+8+\frac{2k\left(2\sqrt{2}-4k\right)}{k^2}-m\left(\frac{2\sqrt{2}-4k}{k^2}\right)-n\left(\frac{k\left(2\sqrt{2}-4k\right)}{k^2}+4\right)+m^2+n^2$$

$$=\frac{(4n-8)k^2+\left(4m-2\sqrt{2}n+4\sqrt{2}\right)k+4-2\sqrt{2}m}{k^2}+m^2+n^2-4n+8$$

因为$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$为定值，所以$\begin{cases}4m-2\sqrt{2}n+4\sqrt{2}=0\\4-2\sqrt{2}m=0\end{cases}$，即$\begin{cases}n=4\\m=\sqrt{2}\end{cases}$

所以存在定点$T\left(\sqrt{2},4\right)$，使得$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$为常数 18.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}-x$，$a\in R$.

（1）若 $a>0$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若任意 $x\ge 0$，$f(x)\ge 1+\frac{1}{2}ax^2$，求 a 的取值范围.

【解析】（1）$f(x)=e^{ax}-x\Rightarrow f'(x)=ae^{ax}-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{\ln a}{a}$

x	$\left(-\infty,-\frac{\ln a}{a}\right)$	$-\frac{\ln a}{a}$	$\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

（2）由 $f(x)\ge 1+\frac{1}{2}ax^2$ 恒成立得 $e^{ax}-x-\frac{1}{2}ax^2-1\ge 0$ 恒成立

设 $h(x)=e^{ax}-x-\frac{1}{2}ax^2-1$，则 $h'(x)=ae^{ax}-1-ax$

设 $H(x)=ae^{ax}-1-ax$，则 $H'(x)=a\left(ae^{ax}-1\right)$

①$a\le 0$ 时，$H'(x)\ge 0$，即 $H(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $H(0)=a-1<0$，$H\left(1-\frac{1}{a}\right)>a-1-a\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)=0$

所以存在 $x_0\in\left(0,1-\frac{1}{a}\right)$，令 $H(x_0)=0$

所以 $0<x<x_0$ 时，$H(x)\le 0$，即 $h'(x)\le 0$，即 $h(x)$ 单调递减

又因为 $h(0)=0$，所以 $0<x<x_0$ 时，$h(x)\le 0$，与已知矛盾，舍；

②$a>0$ 时，$f'(x)$ 与 $H'(x)$ 同号，

所以由（1）可知 $x\ge 0$ 时，$H'(x)\ge 0$，即 $H(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

i $a\ge 1$ 时，$H(0)=a-1\ge 0$，

所以 $x\ge 0$ 时，$H(x)\ge 0$，即 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

又因为 $h(0)=0$，所以 $h(x)\ge 0$，满足题意；

ii $0<a<1$时，$H(0)=a-1<0$，$H\left(\frac{2}{a^2}\right)>a\left(\frac{2}{a}\right)^2-2a\left(\frac{2}{a^2}\right)=0$

所以存在$x_1\in\left(0,\frac{2}{a^2}\right)$，令$H(x_1)=0$

所以$0<x<x_1$时，$H(x)\le 0$，即$h'(x)\le 0$，即$h(x)$单调递减

又因为$h(0)=0$，所以$0<x<x_1$时，$h(x)\le 0$，与已知矛盾，舍》

综上所述，a的取值范围是$[1,+\infty)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。