南京市2021届高三年级第三次模拟考试

数　学

2021.05

注意事项：

1. 本试卷考试时间为120分钟，试卷满分150分，考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分.
3. 答题前，务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

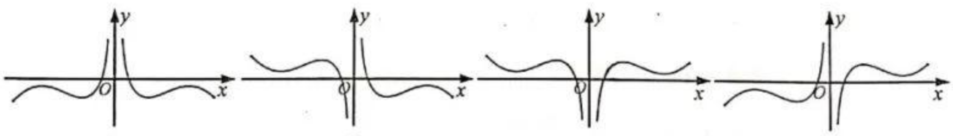
1. 已知集合 $A=\{x\mid 2^x<4\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，则 $A\cup B=$

A. $[-1,2)$　　B. $(2,3]$　　C. $(-1,3]$　　D. $(-\infty,3]$

2. 已知i为虚数单位，若复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则复数 $\frac{1}{z}$ 的虚部为

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

3. 函数 $y=\ln|x|+\cos x$ 的大致图象是



A　　B　　C　　D

4. 将5名学生分配到 A,B,C,D,E 这5个社区参加义务劳动，每个社区分配1名学生，且学生甲不能分配到 A 社区，则不同的分配方法种数是

A. 72　　B. 96　　C. 108　　D. 120

5. 已知 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{3}{4}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})+\cos^2(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12})$ 的值为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$　　D. 1

10. 定义曲线Γ：$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$为椭圆$C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的伴随曲线，则

A. 曲线Γ有对称轴

B. 曲线Γ没有对称中心

C. 曲线Γ有且仅有4条渐近线

D. 曲线Γ与椭圆C有公共点

11. 已知正四棱台的上底面边长为$\sqrt{2}$，下底面边长为$2\sqrt{2}$，侧棱长为2，则

A. 棱台的侧面积为$6\sqrt{7}$

B. 棱台的体积为$14\sqrt{3}$

C. 棱台的侧棱与底面所成角的余弦值为$\frac{1}{2}$

D. 棱台的侧面与底面所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$

12. 已知函数$f(x)=3\sin 2x+4\cos 2x$，$g(x)=f(x)+|f(x)|$．若存在$x_0\in\mathbf{R}$，使得对任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(x_0)$，则

A. 任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x+x_0)=f(x-x_0)$

B. 任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(x_0+\frac{\pi}{2})$

C. 存在$\theta>0$，使得$g(x)$在$(x_0,x_0+\theta)$上有且仅有2个零点

D. 存在$\theta>-\frac{5\pi}{12}$，使得$g(x)$在$(x_0-\frac{5\pi}{12},x_0+\theta)$上单调递减

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. $(3x^2+\frac{1}{x^3})^5$的展开式中的常数项为＿▲＿．

14. 写出一个离心率为$\sqrt{5}$，渐近线方程为$y=\pm 2x$的双曲线方程为＿▲＿．

15. 早在15世纪，达·芬奇就曾提出一种制作正二十面体的方法：如图1，先制作三张一样的黄金矩形$ABCD$（$\frac{短边}{长边}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$），然后从长边$CD$的中点$E$出发，沿着与短边平行的方向剪开一半，即$OE=\frac{1}{2}AD$，再沿着与长边$AB$平行的方向剪出相同的长度，即$OF=OE$，将这三个矩形穿插两两垂直放置，连结所有顶点即可得到一个正二十面体，如图2．若黄金矩形的短边长为4，则按如上制作的正二十面体的表面积为＿▲＿，其外接球的表面积为＿▲＿．

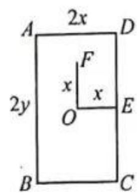


图1

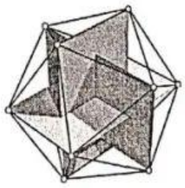


图2

16. 已知直线$y=kx+b$与曲线$y=x^2+\cos x$相切，则$\frac{k\pi}{2}+b$的最大值为＿▲＿．

四、解答题(本大题共6小题，共70分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本题满分10分)

已知四边形$ABCD$中，AC与BD交于点E，$AB=2BC=2CD=4$.

(1)若$\angle ADC=\frac{2}{3}\pi$，$AC=3$，求$\cos\angle CAD$；

(2)若$AE=CE$，$BE=2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

18.(本题满分12分)

已知等差数列$\{a_n\}$满足：a_1+3，a_3，a_4成等差数列，且a_1，a_3，a_8成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

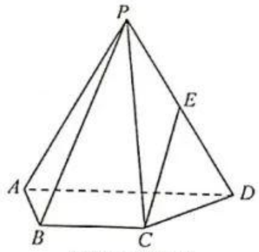
(2)在任意相邻两项a_k与a_{k+1}($k=1,2,\cdots$)之间插入2^k个2，使它们和原数列的项构成一个新的数列$\{b_n\}$.记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，求满足$S_n<500$的n的最大值.

19.（本题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=2BC=2AB=4$，$\triangle PAD$ 为等边三角形，E 为 PD 的中点，直线 AB 与 CE 所成角的大小为 $45°$.

(1)求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求平面 PAB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



（第19题图）

20.（本小题满分 12 分）

某乒乓球教练为了解某同学近期的训练效果，随机记录了该同学 40 局接球训练成绩，每局训练时教练连续发100 个球，该同学每接球成功得1 分，否则不得分，且每局训练结果相互独立，得到如图所示的频率分布直方图.

(1)同一组数据用该区间的中点值作代表，

①求该同学 40 局接球训练成绩的样本平均数 $\bar{x}$.

②若该同学的接球训练成绩 X 近似地服从正态分布 $N(\mu,100)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$，求 $P(54<X<64)$ 的值；

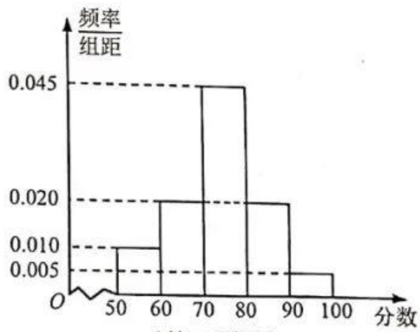
(2)为了提高该同学的训练兴趣，教练与他进行比赛. 一局比赛中教练连续发 100 个球，该同学得分达到 80 分为获胜，否则教练获胜. 若有人获胜达 3 局，则比赛结束，记比赛的局数为 Y. 以频率分布直方图中该同学获胜的频率作为概率，求 $E(Y)$.

参考数据：若随机变量 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，

则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)\approx0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)\approx0.9545$，

$P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)\approx0.9973$.



（第20题图）

21.（本题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $C: y^2=4x$，经过 $P(t,0)(t>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点.

(1)若 $t=4$，求 AP 长度的最小值；

(2)设以 AB 为直径的圆交 x 轴于 M,N 两点，问是否存在 t，使得 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-4$？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{a-e^x}{x}+a\ln x, a\in\mathbf{R}$.

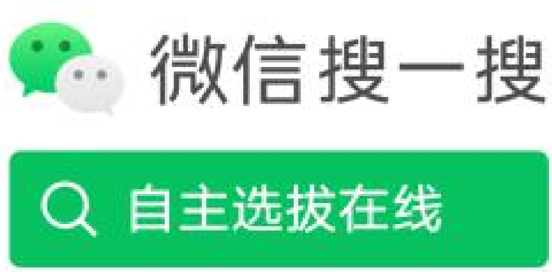
(1)若 $a<e$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $a>e$，求证：函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》