

齐齐哈尔市 高三上学期期末考试
数学试题答案

1.C

当 $n=0,1,2,3,4$ 时, $x=3n+2$ 分别为 2,5,8,11,14,所以 $A \cap B = \{5,8,11\}$,故选 C.

2.A

由 $\frac{1}{1+i} = a+bi(a,b \in \mathbf{R})$,得 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = a+bi$,则 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$,所以 $a+b=0$.故选 A.

3.C

由题意可得该屠夫每天屠的肉成等比数列,记首项为 a_1 ,公比为 q ,前 n 项和为 S_n ,所以

$a_1 = 5, q = 2$,因此前 5 天所屠肉的总两数为 $\frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{5 \times (1-2^5)}{1-2} = 155$.故选 C.

4.B

$\because (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}, \therefore \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$,

$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 a 与 b 的夹角是 $\frac{\pi}{4}$.故选 B.

5.D

采用捆绑法和插空法,从 4 名男生中选择 3 名,进而将 3 个相邻的男生捆在一起,看成 1 个男生,方法数是 A_4^3 种,这样与第 4 个男生看成是 2 个男生;然后 6 个女生任意排的方法数是 A_6^6 种;最后在 6 个女生形成的 7 个空隙中,插入 2 个男生,方法数是 A_7^2 种.综上所述,不同的排法共有 $A_4^3 A_6^6 A_7^2$ 种.故选 D.

6.B

因为函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象的相邻两个零点的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以

$T = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, 所以 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$,

又因为 $f(0) = \sqrt{2}$, 所以 $f(0) = 2\sin \varphi = \sqrt{2}$, 解得 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.故选 B.

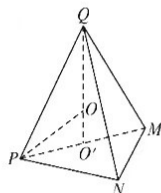
7.B

由 $MN=3, NP=4, MP=5$, 可知 $\angle PNM=90^\circ$, 则球心 O 在过 PM 中点 O' 与面 MNP 垂直的直线上, 因为 MNP 面积为定值, 所以高最大时体积最大, 根据球的几何性质可得, 当 $O'Q$ 过球心时体积最大, 因为四面体 $Q-MNP$ 的最大体积为 10, 所以

$\frac{1}{3} \times S_{\triangle MNP} \times O'Q = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times O'Q = 10$, 可得 $O'Q = 5$,

在 $\triangle OO'P$ 中, $OP^2 = OO'^2 + O'P^2$, 则 $R^2 = (5-R)^2 + \frac{25}{4}$, 得 $R = \frac{25}{8}$,

故球的表面积为 $4\pi \times \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{625\pi}{16}$, 故选 B.



14. $\frac{e}{2}$

由题意, 得 $f'(x) = \frac{\frac{a}{x} - a e^x \ln x}{(e^x)^2} = \frac{\frac{a}{x} - a \ln x}{e^x}$. 又切线斜率 $k = \frac{1}{2}$.

$\therefore f(1) = \frac{a}{e} = \frac{1}{2}, \therefore a = \frac{e}{2}$.

15. $\frac{1}{2}$

依据题意作出图象, 如图:

因为直线 PA 过点 P 且与圆 $x^2 + y^2 - 1$ 相切于点 A ,

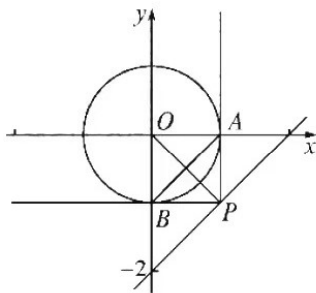
所以 $PA \perp OA$, 所以 $|PA| = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{OP^2 - 1}$,

要使得 PA 最小, 则 OP 要最小, 由题可得 OP 的最小值就是点 O 到直线 $l: y = x - 2$ 的距离 $d = \frac{|0 - 2 - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$.

此时, $|PA|_{\min} = \sqrt{OP_{\min}^2 - 1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 1$,

所以 $\angle OPA = \frac{\pi}{4}$, 由切线的对称性可得 $\angle BPA = \frac{\pi}{2}, |PB| = 1$,

所以 $\triangle PAB$ 的面积为 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.



16. $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$

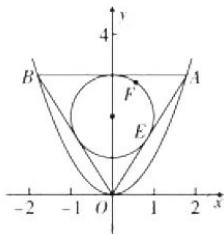
因为点 $A(\sqrt{3}, m)$ 在抛物线上, 所以 $3 = 2pm \Rightarrow m = \frac{3}{2p}$, 点 A 到准线的距离为 $\frac{3}{2p} + \frac{p}{2} = \frac{13}{4}$,

解得 $p = \frac{1}{2}$ 或 $p = 6$. 当 $p = 6$ 时, $m = \frac{1}{4} < 1$, 故 $p = 6$ 舍去, 所以抛物线方程为 $x^2 = y$, $\therefore$

$A(\sqrt{3}, 3), B(-\sqrt{3}, 3)$, 所以 $\triangle OAB$ 是正三角形, 边长为 $2\sqrt{3}$, 其内切圆方程为 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$,

如图所示, $\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$. 设点 $F(\cos\theta, 2 + \sin\theta)$ (θ 为参数), 则

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta + 3 + \frac{3}{2} \sin\theta = 3 + \sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} \in [3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$.



8.C

$f(x) > 0$ 等价于 $e^{ax} + ax > x^2 + 2\ln x = e^{2\ln x} + 2\ln x$.

令函数 $g(x) = e^x + x$, 则 $g'(x) = e^x + 1 > 0$, 故 $g(x)$ 是增函数.

$e^{ax} + ax > e^{2\ln x} + 2\ln x$ 等价于 $ax > 2\ln x (x > 0)$, 即 $a > \frac{2\ln x}{x}$.

令函数 $h(x) = \frac{2\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{2-2\ln x}{x^2}$.

当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

$h(x)_{\max} = h(e) = \frac{2}{e}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{2}{e}, +\infty\right)$. 故选 C.

9.BCD

将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

再将图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 可得 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

对于 A 选项, 令 $h(x) = g\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

则 $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $h\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$, 故函数 $g\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 不是偶函数, A 不正确;

对于 B 选项, 因为 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin 0 = 0$, 故 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点, B 正确;

对于 C 选项, 当 $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, C 正确;

对于 D 选项, 因为对称轴满足 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

则 $k = 0$ 时, $x = \frac{\pi}{12}$, 所以函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称, D 正确. 故选 BCD.

10.ABD

由题意可知: $3 \times 2 + a = 4$, 故 $a = -2$, 故 A 正确;

乙组样本数据方差为 $9 \times 4 = 36$, 故 B 正确;

设甲组样本数据的中位数为 x_i , 则乙组样本数据的中位数为 $3x_i - 2$, 所以两组样本数据的样本中位数不一定相同, 故 C 错误;

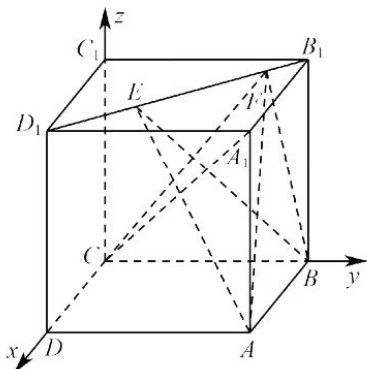
甲组数据的极差为 $x_{\max} - x_{\min}$, 则乙组数据的极差为 $(3x_{\max} - 2) - (3x_{\min} - 2) = 3(x_{\max} - x_{\min})$,

所以两组样本数据的样本极差不同, 故 D 正确; 故选 ABD.

11.ACD

对于 A: 因为 $B_1D_1 \perp A_1C_1$, $B_1D_1 \perp A_1A$, $A_1C_1 \cap A_1A = A_1$, 所以 $B_1D_1 \perp$ 面 A_1C_1CA ,

对于 C: 建立如图所示的空间几何体,



当且仅当 $t=1$ 时 $\cos\theta$ 取最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 即 θ 取最小值 45° , 故 C 正确;

对于 D: 因为 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times EF \times BB_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

点 A 到平面 BDD_1B_1 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{12}$, 即体积为定值, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

12. ABD

对于 A, 因为 $x < \frac{1}{2}$, 所以 $2x-1 < 0$, 所以 $1-2x > 0$,

所以 $2x + \frac{1}{2x-1} = (2x-1) + \frac{1}{2x-1} + 1 = -\left[(1-2x) + \frac{1}{1-2x}\right] + 1 \leq -2 \cdot \sqrt{(1-2x) \cdot \frac{1}{1-2x}} + 1 = -1$,

当且仅当 $1-2x = \frac{1}{1-2x}$, 即 $x=0$ 时等号成立, 所以 $2x + \frac{1}{2x-1}$ 的最大值为 -1 , 故 A 正确;

对于 B, 因为 x, y, z 都是正数, 且 $x+y+z=2$, 所以 $x+1+y+z=3$, $x+1 > 0$, $y+z > 0$,

所以 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+z} \right) (x+1+y+z)$,

所以 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3} \left[5 + \frac{4(y+z)}{x+1} + \frac{x+1}{y+z} \right] \geq \frac{1}{3} \left[5 + 2\sqrt{\frac{4(y+z)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{y+z}} \right] = 3$,

, 当且仅当 $\frac{4(y+z)}{x+1} = \frac{x+1}{y+z}$, 即 $x+1=2(y+z)$, 即 $\begin{cases} x=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ 时等号成立, 所以 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+z}$

的最小值为 3, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $x > 0$, $y > 0$, 所以 $x \cdot 2y \leq \left(\frac{x+2y}{2} \right)^2$, 即 $2xy \leq \frac{(x+2y)^2}{4}$ (当且仅当 $x=2y$ 时

等号成立), 因为 $x+2y+2xy=8$, 所以 $2xy=8-(x+2y)$, 所以 $8-(x+2y) \leq \frac{(x+2y)^2}{4}$, 所

以 $(x+2y)^2 + 4(x+2y) - 32 \geq 0$, 解得 $x+2y \leq -8$ (舍去) 或 $x+2y \geq 4$, 当且仅当 $x=2y=2$

时等号成立, 所以 $x+2y$ 的最小值为 4, 故 C 错误;

对于 D, 令 $x+y=t$, $x+2y=s$, 则 $x=2t-s$, $y=s-t$, 因为 $xy > 0$, 所以 x, y 同号,

则 s, t 同号, 所以 $\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+2y} = 4 - \frac{s}{t} - \frac{2t}{s} \leq 4 - 2\sqrt{\frac{s}{t} \cdot \frac{2t}{s}} = 4 - 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{s}{t} = \frac{2t}{s}$, 即

$s = \sqrt{2}t$ 时取等号, 所以 $\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+2y}$ 的最大值是 $4 - 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \sqrt{2}y$ 时, 等号成立,

故 D 正确. 故选 ABD.

13. 0.4

因为 ξ 符合正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 所以由线的对称轴是 $x=1$, 因为 ξ 在 $(0, 2)$ 内取值的概率为 0.8, 所以 ξ 在 $(1, 2)$ 内取值的概率为 0.4.

17.解 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 21, \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 2(a_1 + 5d) + 3, \end{cases} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 5, \end{cases} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } a_n = 5n - 4. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } S_n = \frac{(5n-3)n}{2}, \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{n}{S_n} = \frac{2}{5n-3}, b_{n+1} = \frac{n+1}{S_{n+1}} = \frac{2}{5n+2}, \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{则 } b_n \cdot b_{n-1} = \frac{4}{(5n-3)(5n+2)} = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5n-3} - \frac{1}{5n+2} \right), \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= \frac{4}{5} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12} \right) + \dots + \left(\frac{1}{5n-3} - \frac{1}{5n+2} \right) \right] \\ &= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5n+2} \right) = \frac{2n}{5n+2}. \dots\dots\dots (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

18.解 (1) 因为 $\sqrt{3}b \sin A = a(2 - \cos B)$, 由正弦定理

$$\text{得 } \sqrt{3} \sin B \sin A = \sin A (2 - \cos B), \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin A > 0, \text{ 所以 } \sqrt{3} \sin B - \cos B = 2, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } 2 \sin \left(B - \frac{\pi}{6} \right) = 2, \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } B = \frac{2\pi}{3}. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 依题意 } \frac{\sqrt{3}ac}{4} = \sqrt{3}, \text{ 即 } ac = 4, \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } a+c \geq 2\sqrt{ac} = 4, \text{ 当且仅当 } a=c=2 \text{ 时取等号}, \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{又由余弦定理得 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac \geq 3ac = 12, \text{ 所以 } b \geq 2\sqrt{3}, \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{当且仅当 } a=c=2 \text{ 时取等号}, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长的最小值为 } 4 + 2\sqrt{3}. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

19.解 (1) 由散点图判断, $y = c + \frac{d}{x}$ 更适合作为该图书每册的成本费 y (单位: 元) 与印刷数量 x (单位: 千册) 的经验回归方程. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

(2) 由 $u_i = \frac{1}{x_i}$, 先建立 y 关于 u 的经验回归方程,

$$\text{由于 } \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^8 (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^8 (u_i - \bar{u})^2} = \frac{7.049}{0.787} \approx 8.96, \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \hat{c} = \bar{y} - \hat{d} \cdot \bar{u} = 3.63 - 8.96 \times 0.269 \approx 1.22, \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

所以 y 关于 u 的经验回归方程为 $\hat{y} = 1.22 + 8.96u$, (7 分)

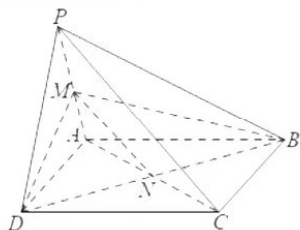
所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 1.22 + \frac{8.96}{x}$ (8 分)

(3) 假设印刷 x 千册, 依题意得 $10x - (1.22 + \frac{8.96}{x})x \geq 78.840$, (10 分)

所以 $x \geq 10$, (11 分)

所以至少印刷 10 000 册才能使销售利润不低于 78 840 元, (12 分)

20. 解 (1) 连接 AC 交 BD 于 N , 连接 MN . 在正方形 $ABCD$ 中, $AC \cap BD = N$,



$\therefore N$ 是 AC 的中点.

又 M 是 AP 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle APC$ 的中位线, $MN \parallel PC$, (2 分)

$\because MN \subset$ 面 BMD , $PC \not\subset$ 面 BMD ,

$\therefore PC \parallel$ 平面 BMD (4 分)

(2) 取 AD 的中点 O , 连接 OP , ON .

在 $\triangle PAD$ 中, $PA = PD$, O 是 AD 的中点,

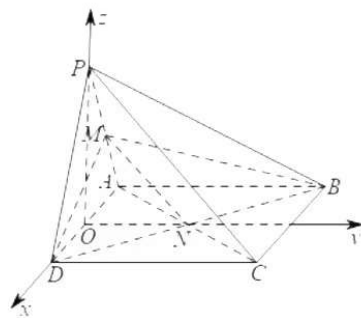
$\therefore OP \perp AD$,

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $OP \subset$ 平面 PAD , 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore OP \perp$ 平面 $ABCD$ (6 分)

在正方形 $ABCD$ 中, O , N 分别是 AD , BD 的中点, $\therefore ON \perp AD$,

$\therefore OP$, OD , ON 两两相互垂直, 分别以 OD , ON , OP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



$$P(0, 0, \sqrt{6}), D(2, 0, 0), B(-2, 4, 0), M(-1, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}).$$

$$\therefore \overrightarrow{DM} = (-3, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}), \overrightarrow{DP} = (-2, 0, \sqrt{6}), \overrightarrow{DB} = (-4, 4, 0).$$

设平面 MBD 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{DM}, \\ \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{DB}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}z = 0, \\ -4x + 4y = 0, \end{cases}$$

取 $x=1$, 得 $\vec{n}_1 = (1, 1, \sqrt{6})$,

$\therefore \vec{n}_1 = (1, 1, \sqrt{6})$ 是平面 MBD 的一个法向量;..... (8 分)

同理, $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 是平面 PBD 的一个法向量, (10 分)

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{6} \times \sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{6})^2} \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots (11 \text{ 分})$$

设二面角 $M-BD-P$ 的大小为 θ ,

由图可知, $\cos \theta = \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 θ 为锐角,

$\therefore \theta = 30^\circ$,

故二面角 $M-BD-P$ 的大小是 30° (12 分)

21. 解(1) $\because$ 抛物线 C 上的点到准线的最小距离为 1, $\therefore \frac{p}{2} = 1$, 解得 $p=2$ (2 分)

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$ (3 分)

(2) 由(1)可知焦点为 $F(1,0)$.

由已知可得 $AB \perp CD$, $\therefore$ 两直线 AB, CD 的斜率都存在且均不为 0.

设直线 AB 的斜率为 k , 则直线 CD 的斜率为 $-\frac{1}{k}$.

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$.

联立 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x-1), \end{cases}$ 消去 x 得 $ky^2 - 4y - 4k = 0$ (5 分)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$. 设 $M(x_M, y_M)$, 由 $y_M = k(x_M - 1)$, 得 $x_M = \frac{y_M}{k} + 1 = \frac{2}{k^2} + 1$,

$\therefore M\left(\frac{2}{k^2} + 1, \frac{2}{k}\right)$ (7 分)

同理可得 $N(2k^2 + 1, -2k)$ (8 分)

$$\therefore |NF| = \sqrt{(2k^2 + 1 - 1)^2 + (-2k)^2} = 2\sqrt{k^2(k^2 + 1)}, |MF| = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k^2} \dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\therefore |MF| \cdot |NF| = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k^2} \times 2\sqrt{k^2(1+k^2)} = 4 \times \frac{1+k^2}{|k|} \geq 4 \times 2 \sqrt{|k| \cdot \frac{1}{|k|}} = 8, \dots\dots (11 \text{ 分})$$

当且仅当 $|k| = \frac{1}{|k|}$, 即 $k = \pm 1$ 时, 等号成立.

$\therefore |MF| \cdot |NF|$ 的最小值为 8. (12 分)

22.解 (1)由题意可得 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{ae^x(x-2)}{x^3} = \frac{(x-ae^x)(x-2)}{x^3}, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

当 $a \leq 0$ 时, 易知 $x - ae^x > 0$,

所以, 由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < 2$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > 2$, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

$$(2) \text{由(1)可得 } f'(x) = \frac{(x-ae^x)(x-2)}{x^3},$$

当 $0 < x < 2$ 时 $\frac{x-2}{x^3} < 0$, 记 $g(x) = x - ae^x$, 则 $g'(x) = 1 - ae^x$,

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内有两个极值点,

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内有两个零点, 所以 $a > 0$ $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

令 $g'(x) = 0$, 则 $x = -\ln a$,

①当 $-\ln a \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, 在 $(0, 2)$ 上, $g'(x) < 0$, 所以在 $(0, 2)$ 上,

$g(x)$ 单调递减, $g(x)$ 的图象至多与 x 轴有一个交点, 不满足题意 $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

②当 $-\ln a \geq 2$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, 在 $(0, 2)$ 上, $g'(x) > 0$, 所以在 $(0, 2)$ 上,

$g(x)$ 单调递增, $g(x)$ 的图象至多与 x 轴有一个交点, 不满足题意 $\dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

③当 $0 < -\ln a < 2$, 即 $\frac{1}{e^2} < a < 1$ 时, $g(x)$ 在 $(0, -\ln a)$ 上单调递增, 在 $(-\ln a, 2)$ 上单调递

减, 由 $g(0) = -a < 0$ 知, 要使 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内有两个零点,

$$\text{必须满足 } \begin{cases} g(-\ln a) = -\ln a - 1 > 0 \\ g(2) = 2 - ae^2 < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{2}{e^2} < a < \frac{1}{e}, \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线