理科参考答案

一．选择题 1—5：ACBDB 6—10：BBCAC 11—12：CD

二．填空题 13. 4 14. $1200+300\sqrt{3}$ 15. $2\sqrt{2}$ 16. 4

三．解答题

17. 解：（1）由于 $S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3$，$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5$，

所以 $\dfrac{S_5}{S_9}=\dfrac{5a_3}{9a_5}=\dfrac{1}{3}$，又 $a_3=6$，所以 $a_5=10$，故 $d=\dfrac{1}{2}(a_5-a_3)=2$.

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=2n$；················6分

（2）$b_n=2^{a_n}=4^n$，$c_n=a_n+b_n=2n+4^n$，则

$$T_n=(2+4)+(2\times2+4^2)+\cdots+(2n+4^n)=2(1+2+\cdots+n)+(4+4^2+\cdots+4^n)$$

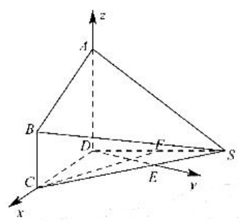
$$=n^2+n+\frac{4(1-4^n)}{1-4}=n^2+n+\frac{4}{3}(4^n-1).$$ ··················12分

18 解：（1）如图，过 D 作 DC 的垂线交 SC 于 E，

以 D 为原点，以 DC,DE,DA 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.

由 $\angle SDC=120^\circ$，则 $\angle SDE=30^\circ$，又 $SD=2$，

所以点 S 到 y 轴的距离为1，到 x 轴的距离为 $\sqrt{3}$，



则有 $D(0,0,0),S(-1,\sqrt{3},0),A(0,0,2),C(2,0,0),B(2,0,1),F\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(2,0,-1),\overrightarrow{AS}=(-1,\sqrt{3},-2),\overrightarrow{CF}=\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

设面 SAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AS}=-x+\sqrt{3}y-2z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=(\sqrt{3},5,2\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CF}\cdot\vec{n}=-\dfrac{5}{2}\times\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times5+0\times2\sqrt{3}=0$，即 $\overrightarrow{CF}\perp\vec{n}$，

又 $CF\not\subset$ 平面 SAB，所以 $CF//$ 平面 SAB；·······················5分

（2）设平面 SAD 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，且 $\overrightarrow{AD}=(0,0,-2),\overrightarrow{AS}=(-1,\sqrt{3},-2)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=-2z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AS}=-x_1+\sqrt{3}y_1-2z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,0)$.

又平面 SAB 的法向量为 $\vec{n}=(\sqrt{3},5,2\sqrt{3})$，

设平面 SAD 与平面 SAB 所成的锐二面角为 θ，

$$\therefore \cos\theta=\left|\cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{8}{2\sqrt{10}\times 2}=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

故平面 SAD 与平面 SAB 所成的锐二面角的余弦值是 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. · 12分

19.解：（1）由题意得，$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}\left(t_i-\overline{t}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{10}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\dfrac{160.1}{\sqrt{82.5\times 311.4}}=\dfrac{160.1}{\sqrt{25690.5}}\approx\dfrac{160.1}{160.3}\approx 0.9988$，

相关系数 $r\approx 0.9988$，说明 y 与 t 的线性相关性很高，

所以，可以用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系. · 6分

（2）由 $\overline{t}=5.5$，$\sum\limits_{i=1}^{10}\left(t_i-\overline{t}\right)^2=82.5$，所以 $\hat{b}=\dfrac{160.1}{82.5}\approx 1.94$，

因此 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{t}=15.5-1.94\times 5.5=4.83$，所以 $\hat{y}=1.94t+4.83$.

当 $t=12$ 时，$\hat{y}=1.94\times 12+4.83=28.11$.

所以 2022 年我国私人汽车拥有量约为 28.11 千万辆. · · · · · · · · · · · · · · · · · · 12分

20.解：(1)依题意 $a=2b$，椭圆 E 方程为：$\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

又椭圆 E 过 $\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$，于是有 $\dfrac{3}{4b^2}+\dfrac{\frac{1}{4}}{b^2}=1$，解得 $b^2=1$，$a^2=4$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. · 6分

(2)由（1）知 $A(0,-1)$，依题意，设直线 l 的方程为 $y=kx+m\left(k\neq 0,m\neq -1\right)$，$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$.

则直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{y_1+1}{x_1}x-1$，令 $y=0$，得点 M 的横坐标为 $x_M=\dfrac{x_1}{y_1+1}$，

同理得点 N 的横坐标为，$x_N=\dfrac{x_2}{y_2+1}$.

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 消去 y 并整理得，$\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

2

$\Delta=64k^2m^2-4\left(4k^2+1\right)\left(4m^2-4\right)>0$，即 $m^2<4k^2+1$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$.

因此，$x_Mx_N=\dfrac{x_1x_2}{(y_1+1)(y_2+1)}=\dfrac{x_1x_2}{(kx_1+m+1)(kx_2+m+1)}=\dfrac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+k(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2}$

$=\dfrac{\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}}{k^2\cdot\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}+k(m+1)\cdot\left(\dfrac{-8km}{4k^2+1}\right)+(m+1)^2}=2$，即 $\dfrac{4(m-1)}{m+1}=2$，解得 $m=3$.

故直线 l 的方程为 $y=kx+3$，所以直线 l 过定点 $(0,3)$. · · · · · · · · · · · · · · · · · · 12分

21. 解：（1）设 $h(x)=e^x-ax-1$，$h'(x)=e^x-a$，

当 $a\le 0$ 时，$h'(x)=e^x-a>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\to-\infty,h(x)\to-\infty$，不满足恒成立；

当 $a>0$ 时，$h(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减，$h(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增，

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(\ln a)=a-a\ln a-1\ge 0$，即 $1-\ln a-\dfrac{1}{a}\ge 0$，即 $\ln a+\dfrac{1}{a}-1\le 0$.

设 $\varphi(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}-1$，$\varphi'(a)=\dfrac{a-1}{a^2}$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

即 $\varphi(a)_{\min}=\varphi(1)=0$，故 $\ln a+\dfrac{1}{a}-1\le 0$ 的解只有 $a=1$，综上 $a=1$. · · · · · · · · · · · · · · · 3分

（2）因为 $\varphi(x)=e^x-\sin x-\cos x=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\varphi'(x)=e^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f'(0)=0$.

①当 $-\dfrac{\pi}{4}<x<0$ 时，$0<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$，$1<\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$，$e^x<1$，

则 $\varphi'(x)=e^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，所以，函数 $\varphi(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 上单调递减，故 $\varphi(x)>f(0)=0$；

②当 $x\ge 0$ 时，构造函数 $t(x)=x-\sin x$，可证得 $x\ge\sin x$，由（1）$e^x\ge x+1$，

所以，当 $x\ge 0$ 时，$\varphi(x)=e^x-\sin x-\cos x\ge e^x-x-1\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立；

综上所述，对任意的 $x>-\dfrac{\pi}{4}$，$f(x)\ge g(x)$；

注：证明此命题时也可以不用切线放缩，直接利用 $\varphi(x)$ 单调性或不等式两边同除以 e^x. · · · · · · · 7分

（3）因为 $f(x)+g(x)-2-ax\ge 0$，所以 $e^x+\sin x+\cos x\ge 2+ax$，即 $e^x+\sin x+\cos x-2-ax\ge 0$.

不妨设 $F(x)=e^x+\sin x+\cos x-2-ax$，原条件即 $F(x)\ge 0$，

3

因为$F(x)\ge 0$且$F(0)=0$，所以$x=0$时，$F(x)$取得最小值.

由于函数$F(x)$为可导函数，$F'(x)=e^x+\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-a$，则$x=0$为函数$F(x)$的极小值点，

故$F'(0)=0$.所以$F'(0)=e^0+\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}-a=2-a=0$，解得$a=2$.

下面证明当$a=2$时，$x=0$是函数$F(x)$的极小值点.

由（2）问可知当$x>-\dfrac{\pi}{4}$时，$F'(x)=e^x+\cos x-\sin x-2$，$F''(x)=e^x-\sin x-\cos x=\varphi(x)\ge 0$，故

函数$F'(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},+\infty\right)$上单调递增，$\because F'(0)=0$，

$\therefore$当$-\dfrac{\pi}{4}<x<0$时，$F'(x)<F'(0)=0$，当$x>0$时，$F'(x)>F'(0)=0$.

$\therefore$函数$F(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$单调递减，函数$F(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

$\therefore x=0$是函数$F(x)$的极小值点，合乎题意.

综上所述，$a=2$. · 12分

22. 解：（1）由已知得$t=2(x-\sqrt{3})$代入$y=-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$，消去参数$t$得

曲线C_1的普通方程为$\sqrt{3}x-y-4=0$. · · · · · · · · · · · · · · · · · · 4分

（2）由曲线C_2的极坐标方程$\rho=a\cos\theta$得$\rho^2=a\rho\cos\theta$，

又$\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，所以$x^2+y^2=ax$，即$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$，

所以曲线C_2是圆心为$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$，半径等于$\dfrac{a}{2}$的圆. 因为曲线$C_2$上恰有三个点到曲线$C_1$的距离为$\dfrac{1}{2}$，

所以圆心$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$到直线$\sqrt{3}x-y-4=0$的距离$d=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\left|\sqrt{3}\times\dfrac{a}{2}-4\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}$，

解得$a=10(2-\sqrt{3})$. · 10分

4

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。