

## 金华十校 2022-2023 学年第二学期调研考试

### 高二数学卷评分标准与参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | A | D | A | B | C | D | C |

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

| 题号 | 9   | 10 | 11 | 12 |
|----|-----|----|----|----|
| 答案 | ABC | AD | AB | BD |

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -220      14.  $y=x+1$       15.  $\frac{1}{6}$       16.  $a < -6$  或  $a > 0$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(I) 由  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\alpha$  得  $\sin\alpha \cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha \sin\frac{\pi}{4} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ,

则  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ , 因为  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 0$ ,

解得  $\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ , 又  $\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

所以  $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ . ..... 5 分

(II)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + 2 \times \frac{1 - \cos x}{2}$

$= \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ , ..... 8 分

$\because x \in [0, \pi]$ , 所以  $x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ , 当  $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x)$  的最大值为 2. .... 10 分

18. 解: (I)  $(0.004+0.020+0.044+x+0.044+0.010+0.010) \times 5 = 1$ , ..... 3分

解得  $x=0.068$ . ..... 5分

(II)列联表如下:

| 养殖法  | 箱产量                |                        | 合计  |
|------|--------------------|------------------------|-----|
|      | 箱产量 $<50\text{kg}$ | 箱产量 $\geq 50\text{kg}$ |     |
| 旧养殖法 | 60                 | 40                     | 100 |
| 新养殖法 | 34                 | 66                     | 100 |
| 合计   | 94                 | 106                    | 200 |

..... 8分

零假设为  $H_0$ : 箱产量与养殖方法独立, 即箱产量与养殖方法无关.

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (60 \times 66 - 40 \times 34)^2}{100 \times 100 \times 94 \times 106} \approx 13.57 \geq 6.635, \dots 10分$$

所以推断  $H_0$  不成立, 即箱产量与养殖方法有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.01. ....12分

19. 解: (I) 在  $\triangle ABC$  中, 由  $\sin \angle BAC = \sqrt{3} \sin \angle ACB$ ,

可知  $BC = \sqrt{3} AB = \sqrt{3}$ . ..... 2分

由于  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore \angle ACB = \frac{\pi}{6}$ ,  $\therefore \angle BCD = \frac{\pi}{2}$ .

$DC = AC = 2$ ,  $\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$ ,  $\therefore x=2, y=1$ . ..... 6分

(II) 在  $\triangle ABC$  中,  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7}$ , ..... 8分

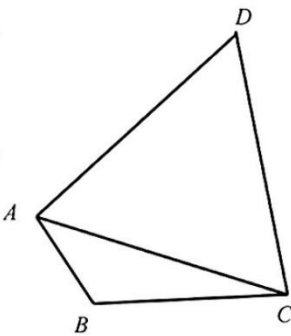
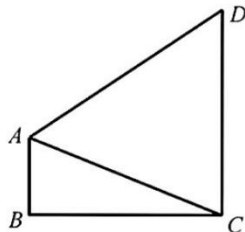
$$\text{所以 } \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{7}^2 + 1^2 - \sqrt{3}^2}{2 \times 1 \times \sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}, \quad \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},$$

$$\cos \angle BAD = \cos \left( \angle BAC + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5}{2\sqrt{7}} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{7}},$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos \angle BAD}$$

$$= \sqrt{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{7} \times \frac{1}{2\sqrt{7}}} = \sqrt{7}.$$

$\therefore BD = \sqrt{7}$ . .....12分



20. 解: (I) 过  $E$  作  $EF \parallel PC$  交线段  $DC$  于  $F$ , 连接  $AF$ .

$\because EF \parallel PC, PC \subset \text{平面 } PBC,$

$\therefore EF \parallel \text{平面 } PBC,$

又  $\because AE \parallel \text{平面 } PBC, EF \cap AE = E,$

$\therefore \text{平面 } AEF \parallel \text{平面 } PBC,$

$\because \text{平面 } AEF \cap \text{平面 } ABCD = AF,$

$\text{平面 } PBC \cap \text{平面 } ABCD = BC,$

$\therefore AF \parallel BC. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又  $\because AB \parallel CD, \therefore$  四边形  $ABCF$  是平行四边形,  $\therefore CF = AB = 2$ , 而  $CD = 4$ ,

故  $CF = \frac{1}{2} CD$ , 得  $PE = \frac{1}{2} PD$ , 得  $\lambda = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II)  $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{四边形 } ABCD} \times PO$ , 得  $S_{\text{四边形 } ABCD} = 3\sqrt{3}.$

由  $S_{\text{四边形 } ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$  得  $S_{\triangle BCD} = 2\sqrt{3},$

于是  $C$  到直线  $BD$  的距离为 2,  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

满足  $AB \parallel CD$  或  $AD \parallel BC$ , 故只能  $AD \parallel BC.$

此时,  $BC$  为直径, 直径为 4.

以  $O$  为原点, 射线  $OB, OP$  为  $y, z$  轴如图建立空间直角坐标系.  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

则  $A(\sqrt{3}, 1, 0), B(0, 2, 0), C(0, -2, 0), P(0, 0, \sqrt{2}),$

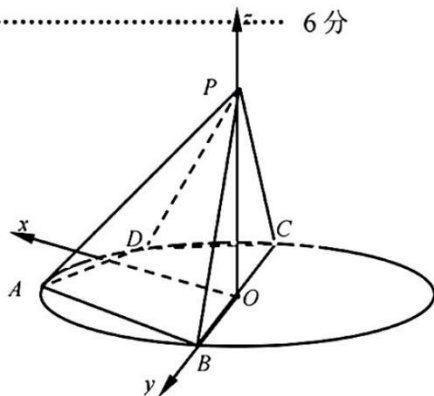
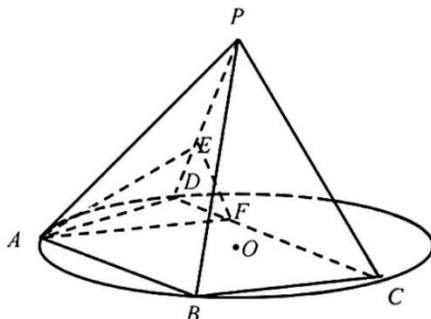
所以  $\overrightarrow{PA} = (\sqrt{3}, 1, -\sqrt{2}), \overrightarrow{PB} = (0, 2, -\sqrt{2}), \overrightarrow{PC} = (0, -2, -\sqrt{2}), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

设平面  $PAB$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ , 则  $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} \sqrt{3}x + y - \sqrt{2}z = 0, \\ 2y - \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$

令  $y = 1$ , 则  $z = \sqrt{2}, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $\mathbf{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{2}\right), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

设直线  $PC$  与平面  $PAB$  所成角为  $\theta$ , 则  $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PC}| |\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{30}}{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

十校高二数学 3 (共 6 页)



∴直线  $PC$  与平面  $PAB$  所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  . ..... 12 分

21. 解: (I) 方法 1:  $\xi$  取值为 0, 1, 2, 3, 每次取到白球的概率  $p = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$  . ..... 2 分

因为  $\xi \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ , 故  $E(\xi) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$  ..... 4 分

方法 2:  $P(\xi = i) = C_3^i \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{3-i} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$

所以  $\xi$  分布列为

|       |                |               |               |                |
|-------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| $\xi$ | 0              | 1             | 2             | 3              |
| $P$   | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ |

..... 3 分

故  $E(\xi) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$  ..... 4 分

(II) 抛掷两颗骰子, 记点数之和除以 3 的余数等于  $i \ (i=0, 1, 2)$  为事件  $A_i$ ,

则点数之和等于 3, 6, 9, 12 的分别有 (1, 2), (2, 1) 2 种; (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) 5 种;

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) 4 种; (6, 6) 1 种情况; 故  $P(A_0) = \frac{2+5+4+1}{36} = \frac{1}{3}$ .

点数之和等于 4 有 (1, 3), (2, 2), (3, 1) 3 种; 等于 7 有 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) 6 种;

等于 10 有 (4, 6), (5, 5), (6, 4) 3 种; 故  $P(A_1) = \frac{3+6+3}{36} = \frac{1}{3}$ .

点数之和等于 2 有 (1, 1) 1 种; 等于 5 有 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) 4 种; 等于 8 有

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) 5 种; 等于 11 有 (5, 6), (6, 5) 2 种, 故  $P(A_2) = \frac{1+4+5+2}{36} = \frac{1}{3}$ .

所以  $P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{3}$  . ..... 7 分

记摸出的 3 个球中至少有 2 个白球记为事件  $B$ , 则

$$P(B|A_0) = \frac{C_5^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} + \frac{C_5^3}{C_6^3} = 1, \quad P(B|A_1) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} + \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{5},$$

$$P(B|A_2) = \frac{C_3^2 \cdot C_3^1}{C_6^3} + \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{2} \text{ ..... 10 分}$$

由全概率公式可得  $P(B) = P(A_0) \cdot P(B|A_0) + P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)$

$$= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{30} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解: (I)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x} - \frac{3}{2} \ln x$ ,

所以  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} = \frac{2x^2 - 3x - 2}{2x^2} = \frac{(2x+1)(x-2)}{2x^2}$ ,  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令  $f'(x) > 0$  得  $x > 2$ , 令  $f'(x) < 0$  得  $0 < x < 2$ .

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $(2, +\infty)$ , 单调递减区间是  $(0, 2)$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II)(i)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - ax - 1}{x^2}$ ,

设  $g(x) = x^2 - ax - 1$ ,  $g(0) = -1$ ,  $g(1) = -a < 0$ ,  $g(a) = -1$ ,  $g(a+1) = a > 0$ ,

$\therefore$  存在唯一  $x_0 \in (a, a+1)$  且  $x_0 > 1$ , 使得  $g(x_0) = 0$ .

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上递增,  $x_0$  是极小值点.  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

若  $a \leq e$ , 则  $f(x)_{\min} = f(x_0) = \frac{x_0^2+1}{x_0} - a \ln x_0 \geq \frac{x_0^2+1}{x_0} - e \ln x_0 > x_0 - e \ln x_0 \geq 0$ , 不满足要求,

故要使函数  $f(x)$  有两个不相等的零点  $x_1, x_2$ , 则  $f(x_0) < 0$ ,  $a > e$ .

于是  $e < a < x_0 < a+1$ .  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(ii)  $f(x_1) = x_1 + \frac{1}{x_1} - a \ln x_1 = 0$  ①,  $f(x_2) = x_2 + \frac{1}{x_2} - a \ln x_2 = 0$  ②,

①-②得  $x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = a(\ln x_1 - \ln x_2)$ , 整理得  $1 - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2}$  ③.

下证:  $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ . 不妨设  $0 < x_1 < x_2$ , 令  $t = \frac{x_1}{x_2}$ , 则  $0 < t < 1$ .

$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$  可化为  $\frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{\frac{x_1}{x_2} + 1} > \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2}$ , 即  $\frac{t-1}{t+1} > \frac{1}{2} \ln t$ .



令  $h(t) = \frac{1}{2} \ln t - \frac{t-1}{t+1}$ ,  $h'(t) = \frac{1}{2t} - \frac{2}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2} > 0$ , 于是  $h(t)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,

又  $h(1)=0$ , 所以  $h(t) = \frac{1}{2} \ln t - \frac{t-1}{t+1} < 0$ , 从而  $\frac{t-1}{t+1} > \frac{1}{2} \ln t$ ,

得  $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ . ..... 10 分

于是③式可化为  $1 - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} > \frac{2a}{x_1 + x_2}$ , 得  $x_1 + x_2 > 2a + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 2a$ .

$x_1 + x_2 > 2a$  得证. .... 12 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线