机密★启用前(新教材卷)

华大新高考联盟2023届高三4月教学质量测评

数 学

命题:华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页,共22题。满分150分,考试用时120分钟

★ 祝考试顺利 ★

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置,认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致,并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置。
2. 选择题的作答:选出答案后,用2B铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。
3. 非选择题的作答:用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内。答在试题卷上或答题卷指定区域外无效。
4. 考试结束,监考人员将答题卷收回,考生自己保管好试题卷,评讲时带来。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\mid 3x^2-2x-8<0\}$,$B=\{x\mid y=\ln(7x-4)\}$,则 $A\cap B=$

A. $\left\{x\middle|-\frac{4}{3}<x<\frac{4}{7}\right\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<\frac{4}{3}\right\}$

C. $\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<2\right\}$　　D. $\left\{x\middle|-2<x<\frac{4}{7}\right\}$

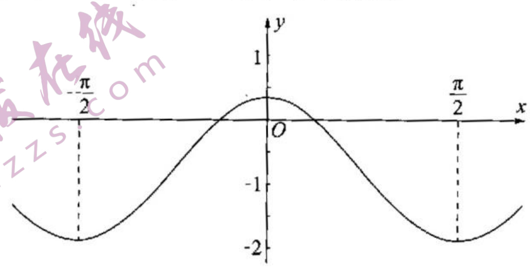
2. 已知 $z=\frac{7-4i}{(1-i)^2}+i^{2023}\cdot(5-i)$,则在复平面内,复数 z 所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 某老师为了奖励考试成绩优异的同学,在微信群里发了一个拼手气红包.已知甲、乙、丙三人抢到的红包金额超过1元的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$,则这三人中至少有两人抢到的红包超过1元的概率为

A. $\frac{11}{24}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如下图所示,则 $f(x)$ 的解析式可能为



A. $\cos(4\cos x)+\cos(4\sin x)$　　B. $\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$

C. $\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$　　D. $\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}$

5. 过点 $A(2,5)$ 的直线 l 与函数 $f(x)=\frac{5x-11}{x-2}$ 的图象交于 M,N 两点，若 O 为坐标原点，$B(5,1)$，则 $\cos\langle\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},\overrightarrow{AB}\rangle=$

A. $-\frac{14\sqrt{58}}{145}$　　B. $-\frac{7\sqrt{58}}{145}$　　C. $-\frac{14\sqrt{29}}{145}$　　D. $-\frac{7\sqrt{29}}{145}$

6. 已知正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的上、下底面面积分别为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，$9\sqrt{3}$，若 $AA_1=\sqrt{30}$，则该正三棱台的外接球的表面积为

A. 40π　　B. 80π　　C. 30π　　D. 60π

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，倾斜角为 θ 的直线 l 经过点 $A(a,0)$ 和点 B，其中 $\overrightarrow{BF_1}=2\overrightarrow{BD}$，$F_2D\perp F_1B$，$|F_2D|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，若 $\cos\theta=\frac{7\sqrt{31}}{62}$，则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm2x$　　B. $y=\pm x$　　C. $y=\pm\frac{5}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{4}{3}x$

8. 若函数 $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}+m\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 m 的取值范围为

A. $(-\infty,0]$　　B. $\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.《尘劫记》是元代一部经典的古典数学著作，里面记载了一个有趣的数学问题：假设每对老鼠每月生子一次，每月生 12 只，且雌雄各半. 1 个月后，有一对老鼠生了 12 只小老鼠，一共 14 只；2 个月后，每对老鼠各生 12 只小老鼠，一共 98 只，……，以此类推. 记每个月新生的老鼠数量为 a_n，每个月老鼠的总数量为 b_n，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n，可知 $a_1=12,b_1=14,a_2=84,b_2=98$，则下列说法正确的是

A. $a_6=12\cdot7^6$　　B. $b_6=2\cdot7^6$　　C. $S_6=2\cdot7^6-2$　　D. $T_6=\frac{7^8-7}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$，过点 $(1,0)$ 的直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切，则与直线 l 垂直的直线为

A. $4x-y+2=0$　　B. $x-2y+8=0$

C. $x+y-5=0$　　D. $2x+4y-3=0$

11. 已知函数 $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{3}$，则下列说法错误的是

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 6π

B. $(\pi,0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

C. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到一个偶函数

D. 函数 $f(x)$ 在 $[0,10\pi]$ 上有 7 个零点

12. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点到准线的距离为 2，过点 $A(a,a-5)$ 作抛物线 C 的两条切线，切点分别为 P,Q，若 $\frac{|PQ|}{|PA|}=2$，则点 A 到原点的距离为

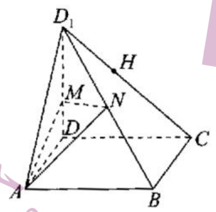
A. $2\sqrt{29}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. $\frac{5\sqrt{29}}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若圆 $C_1:x^2+y^2-4x+2y=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-8x+10y+16=0$ 交于 P,Q 两点，则直线 PQ 的方程为______.

14. 已知 $\left(2x^{\frac{2}{5}}-\frac{4}{x^4}\right)^n$ 的展开式中各项的系数之和为 256，记展开式中 x^{-10} 的系数为 a，则 $\frac{a}{128}=$______.

15. 如图，已知四棱锥 D_1-$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形，M 是棱 DD_1 上靠近点 D 的三等分点，N 是 BD_1 的中点，平面 AMN 交 CD_1 于点 H，则 $\frac{D_1H}{D_1C}=$______.



16. 已知 $a=\ln 3$，$b=\log_{11}3$，现有如下说法：①$a<2b$；②$a+b>3ab$；③$b-a<-ab$. 则正确的说法有______.（横线上填写正确命题的序号）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

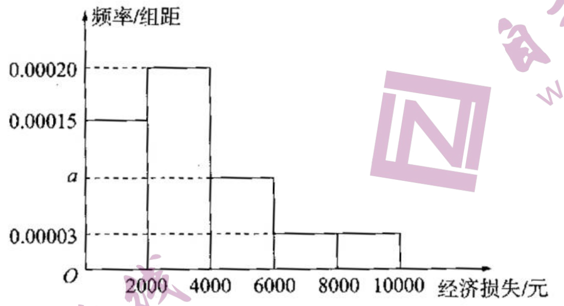
记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}=n$，且 $\frac{S_2}{3}$，a_{k+1}，S_{k+3} 是等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

（1）求 b_5 的值；

（2）求数列 $\left\{\frac{1}{a_{3n+2}a_{3n+5}}+a_{4n-3}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

某地区突发小型地质灾害，为了了解该地区受灾居民的经济损失，制定合理的补偿方案，研究人员经过调查后将该地区所有受灾居民的经济损失情况统计如下图所示.



（1）求 a 的值以及所有受灾居民的经济损失的平均值；

（2）以频率估计概率，若从所有受灾居民中随机抽取 4 人，记受灾居民的经济损失在 $[2000,4000)$ 的人数为 X，求 X 的分布列以及数学期望 $E(X)$.

19.（12 分）

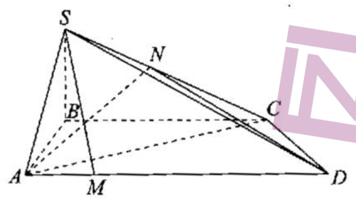
已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b\cos\left(\frac{3\pi}{2}+A\right)+\sin(\pi+B)\sqrt{\frac{6}{1-\cos 2C}}=0$.

(1)求 $c\sin A$ 的值；

(2)若 $2(b\sin C-a\tan C)=c\tan C$，且 $S_{\triangle ABC}\geqslant\lambda$，求实数 λ 的取值范围.

20.(12 分)

已知四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 如图所示，其中 $SB=\sqrt{3}$，$AB=1$，$AD=3\sqrt{3}$，$\angle ABC=\angle ABS=\angle DAB=3\angle ADC=90^\circ$，平面 $SBA\perp$ 平面 $ABCD$，点 M 在线段 AD 上，$AM=\frac{\sqrt{3}}{6}$，点 N 在线段 SC 上.



(1)求证：$AC\perp SM$；

(2)若平面 ADN 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$，求 SN 的值.

21.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 P,Q 在椭圆 C 上运动，且 $|PF|$ 的最小值为 $\sqrt{6}-\sqrt{3}$；当点 P 不在 x 轴上时，点 P 与椭圆 C 的左、右顶点连线的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)已知直线 $l:x-2y=0$ 与椭圆 C 在第一象限交于点 A，若 $\angle PAQ$ 的内角平分线的斜率不存在，探究：直线 PQ 的斜率是否为定值，若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=mx(\ln x-1)-x^2$.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $[3,9]$ 上有两个零点，求实数 m 的取值范围；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)+m^2\leqslant f'(x)+1$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

机密★启用前(新教材卷)

华大新高考联盟 2023 届高三 4 月教学质量测评

数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题立意】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x\mid(3x+4)(x-2)<0\}=\left\{x\,\middle|\,-\frac{4}{3}<x<2\right\}$,$B=\{x\mid 7x-4>0\}=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{4}{7}\right\}$,故 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\frac{4}{7}<x<2\right\}$,故选 C.

2.【答案】D

【命题立意】本题考查复数的运算、几何意义,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$z=\frac{7-4i}{(1-i)^2}+i^{2023}\cdot(5-i)=\frac{7-4i}{-2i}+(-i)\cdot(5-i)=2+\frac{7}{2}i-5i-1=1-\frac{3}{2}i$,故在复平面内,复数 z 所对应的点为 $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$,位于第四象限,故选 D.

3.【答案】A

【命题立意】本题考查事件的概率,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】依题意,所求概率 $P=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$,故选 A.

4.【答案】B

【命题立意】本题考查函数的图象与性质,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】由题图可知,函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,故函数 $f(x)$ 为偶函数,排除 C;而 $\cos\left(4\cos\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\sin\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos 4>0$,排除 A;$\cos\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{4}=\cos 2\sqrt{2}+\frac{3}{4}>-1$,排除 D;故选 B.

5.【答案】C

【命题立意】本题考查平面向量的数量积及其应用,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$f(x)=\frac{5x-10-1}{x-2}=5-\frac{1}{x-2}$,故函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(2,5)$,

故 $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})\cdot\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=(4,10)\cdot(3,-4)=-28$,

而 $|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|=2\sqrt{29}$,$|\overrightarrow{AB}|=5$,

故 $\cos\langle\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},\overrightarrow{AB}\rangle=\frac{-28}{2\sqrt{29}\cdot 5}=\frac{-14}{\sqrt{29}\cdot 5}=-\frac{14\sqrt{29}}{145}$,故选 C.

6.【答案】D

【命题立意】本题考查空间几何体的表面积与体积,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意,$\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,解得 $AB=3$,同理可得 $A_1B_1=6$.

记 $\triangle ABC$,$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆圆心分别为 O,O',则 $AO=\sqrt{3}$,$A_1O'=2\sqrt{3}$,

而 $AA_1=\sqrt{30}$,由平面几何知识可知 $OO'=3\sqrt{3}$.

记正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球球心为 O_1，则 $O_1A=O_1A_1=R$，
即 $\sqrt{AO^2+O_1O^2}=\sqrt{A_1O'^2+O'O_1^2}$.
设 $O'O_1=h$，故 $3+(3\sqrt{3}-h)^2=h^2+12$，解得 $h=\sqrt{3}$，则 $R=\sqrt{15}$，
故所求外接球的表面积 $S=4\pi R^2=60\pi$，故选 D.

7.【答案】D
【命题立意】本题考查双曲线的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.
【解析】因为 $\overrightarrow{BF_1}=2\overrightarrow{BD}$，$F_2D\perp F_1B$，故 ΔBF_2F_1 为等腰三角形，故 $|BF_2|=|F_1F_2|=2c$，而 $|F_2D|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，故 $B(2c,\sqrt{3}c)$；而 $\cos\theta=\frac{7\sqrt{31}}{62}$，故直线 $\tan\theta=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$，即 $\frac{\sqrt{3}c}{2c-a}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$，则 $\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{3}$，解得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，故选 D.

8.【答案】D
【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.
【解析】依题意，令 $f'(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}-m\sin x=g(x)$，则 $g'(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{4}-m\cos x\geqslant\frac{1}{2}-m\cos x$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立；当 $m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)\geqslant0$，则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；当 $m>\frac{1}{2}$ 时，$g''(x)=\frac{1}{8}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})+m\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，又 $g''(0)=0$，所以 $g'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增. 因为 $g'(0)=\frac{1}{2}-m<0$，所以 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)\leqslant g(0)=0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，不合题意，舍去. 故实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$，故选 D.

二、选择题

9.【答案】BC
【命题立意】本题考查数学文化、等比数列的运算，考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.
【解析】依题意，$a_2=84$，$b_1=14$.
因为 $a_{n+1}=6b_n$，$b_{n+1}=a_{n+1}+b_n$，所以 $b_{n+1}=7b_n$. 故数列 $\{b_n\}$ 是以 14 为首项，7 为公比的等比数列.
故 $b_n=14\cdot7^{n-1}=2\cdot7^n$，$a_{n+1}=6b_n=12\cdot7^n$，而 $a_1=12$，故 $a_n=12\cdot7^{n-1}$.
故 $S_n=\frac{12\cdot(1-7^n)}{1-7}=2\cdot(7^n-1)$，$T_n=\frac{14\cdot(1-7^n)}{1-7}=\frac{7\cdot(7^n-1)}{3}$，故选 BC.

10.【答案】AD
【命题立意】本题考查导数的几何意义、直线垂直关系的判断，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.
【解析】依题意，$f(x)=x^3-x$，则 $f'(x)=3x^2-1$，设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-x_0)$，
则所求切线的方程为 $y-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(x-x_0)$，
将 $(1,0)$ 代入，可得 $-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(1-x_0)$，即 $2x_0^3-3x_0^2+1=0$，
故 $(2x_0+1)(x_0-1)^2=0$，解得 $x_0=-\frac{1}{2}$ 或 $x_0=1$，
故直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{4}$ 或 2，
观察可知，直线 $4x-y+2=0$，$2x+4y-3=0$ 与直线 l 垂直，故选 AD.

11.【答案】ABC

【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=\sin\frac{2x}{3}-\sqrt{3}\cos\frac{2x}{3}-\sqrt{3}=2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$，故 $T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，故 A 错误；

因为 $f(0)+f(2\pi)=-3\sqrt{3}\neq0$，故 $(\pi,0)$ 不是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，故 B 错误；

将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{4\pi}{9}\right)-\sqrt{3}$，显然该函数不是偶函数，故 C 错误；

函数 $f(x)$ 在 $[0,10\pi]$ 上有 7 个零点，分别为 $\pi,\frac{3\pi}{2},4\pi,\frac{9\pi}{2},7\pi,\frac{15\pi}{2},10\pi$，故 D 正确. 故选 ABC.

12.【答案】CD

【命题立意】本题考查抛物线的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意可知抛物线 $C:x^2=4y$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2$，$y_2=\frac{1}{4}x_2^2$.

由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{1}{2}x$，所以点 P 处的切线方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$.

将 $A(a,a-5)$ 代入，得 $a-5-y_1=\frac{1}{2}x_1(a-x_1)$，即 $x_1^2-2ax_1+4(a-5)=0$，

同理可得 $x_2^2-2ax_2+4(a-5)=0$.

所以 x_1,x_2 是方程 $x^2-2ax+4(a-5)=0$ 的两个解，故 $x_1+x_2=2a$，①　$x_1x_2=4(a-5)$，②

所以直线 PQ 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}=\frac{1}{2}a$，

由 $\frac{|PQ|}{|PA|}=2$，得 $\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=2\sqrt{1+\frac{1}{4}x_1^2}\,|x_1-a|$，

由①得 $|x_1-x_2|=2|x_1-a|$，所以 $\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}x_1^2}$，化简得 $x_1^2=a^2$.

因为 $x_1\neq a$，所以 $x_1=-a$. ③

由①②③，得 $3a^2+4a-20=0$，解得 $a_1=2$，$a_2=-\frac{10}{3}$，

所以点 A 的坐标为 $(2,-3)$ 或 $\left(-\frac{10}{3},-\frac{25}{3}\right)$，

故 $|AO|=\sqrt{13}$ 或 $\frac{5\sqrt{29}}{3}$，故选 CD.

三、填空题

13.【答案】$x-2y-4=0$ $\left(y=\frac{1}{2}x-2\text{ 也可}\right)$.

【命题立意】本题考查圆与圆的基本关系，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】联立 $\begin{cases}x^2+y^2-4x+2y=0,\\x^2+y^2-8x+10y+16=0,\end{cases}$ 两式相减可得 $4x-8y-16=0$，即 $x-2y-4=0$.

14.【答案】-896.

【命题立意】本题考查二项式定理，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，有 $(-2)^n=256$，则 $n=8$，

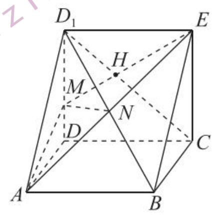
故 $\left(2x^{\frac{2}{5}}-\frac{4}{x^4}\right)^8$ 的展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(2x^{\frac{2}{5}})^{8-r}\cdot\left(-\frac{4}{x^4}\right)^r=C_8^r\cdot2^{8-r}\cdot(-4)^r\cdot x^{\frac{16-22r}{5}}$，

令$\frac{16-22r}{5}=-10$,解得 $r=3$,故 $a=C_8^3\cdot 2^5\cdot(-4)^3$,$\frac{a}{128}=-896$.

15.【答案】$\frac{2}{5}$.

【命题立意】本题考查空间几何体的位置关系,考查数学运算的核心素养.

【解析】如图所示,由底面 $ABCD$ 是平行四边形,可将四棱锥 D_1-$ABCD$ 补成三棱柱 ADD_1-BCE,易知 $AB/\!/DC/\!/D_1E$,且 $AB=DC=D_1E$.



因为 N 是 BD_1 的中点,所以延长 AN 必过点 E.

连接 ME,由题意易知 ME 必交 D_1C 于点 H.

因为在三棱柱 ADD_1-BCE 中,四边形 CDD_1E 为平行四边形,

所以$\triangle MD_1H\backsim\triangle ECH$,

又因为 M 是棱 DD_1 上靠近点 D 的三等分点,所以$\frac{D_1H}{HC}=\frac{D_1M}{CE}=\frac{2}{3}$,

则$\frac{D_1H}{D_1C}=\frac{2}{5}$.

16.【答案】②③

【命题立意】本题考查指对数的运算、不等关系、函数的单调性,考查数学运算、数学抽象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$a=\ln 3=\log_e 3$,$2b=2\log_{11}3=\log_{\sqrt{11}}3<\log_e 3=a$,故 $a>2b$,故①错误;$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_3 e+\log_3 11=\log_3 11e>\log_3 27=3$,则 $a+b>3ab$,故②正确;$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\log_3 e-\log_3 11=\log_3\frac{e}{11}<\log_3\frac{1}{3}=-1$,故 $b-a<-ab$,故③正确.故填②③.

四、解答题

17.【命题立意】本题考查等差数列的基本运算,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意,$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n$,故当 $n=1$ 时,$a_1=1$; ……(1 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=n-1$,两式相减可得$\frac{a_n}{n}=1$,则 $a_n=n$,

故 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$a_n=n$. ……(3 分)

而 $a_{k+1}^2=\frac{S_2}{3}\cdot S_{k+3}$,故$(k+1)^2=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$,解得 $k=5$($k=-2$ 舍去),

而 $b_1=\frac{S_2}{3}=1$,$b_2=a_6=6$,故 $b_n=6^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,$b_5=6^4=1296$. ……(5 分)

(2)依题意,$\frac{1}{a_{3n+2}a_{3n+5}}+a_{4n-3}=\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}+4n-3$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)+4n-3$, ……(7 分)

$T_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)+\frac{(1+4n-3)n}{2}$

$=\frac{n}{15n+25}+2n^2-n$. ……(10 分)

18.【命题立意】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征、离散型随机变量的分布列以及数学期望、二项分布,考查数学运算、逻辑推理、直观想象、数学建模的核心素养.

【解析】(1)依题意,$(0.00003\times 2+a+0.00015+0.00020)\times 2000=1$,

解得 $a=0.00009$, ……(2 分)

故所求的平均值为 $1000\times0.3+3000\times0.4+5000\times0.18+7000\times0.06+9000\times0.06=3360$. ……(5 分)

(2)依题意,$X\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$,

故 $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$,$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$,

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$,$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{96}{625}$,

$P(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$, ……(9 分)

得 X 的分布列如下:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

……(10 分)

故 $E(X)=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$. ……(12 分)

19.【命题立意】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式、基本不等式,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意,$b\sin A-\sin B\sqrt{\frac{3}{\sin^2C}}=0$, ……(2 分)

因为 $\sin C>0$,故 $b\sin A\sin C-\sqrt{3}\sin B=0$, ……(3 分)

由正弦定理,$b\sin A=a\sin B$,故上式可化为 $a\sin B\sin C-\sqrt{3}\sin B=0$, ……(4 分)

因为 $\sin B\neq0$,故 $a\sin C=\sqrt{3}$,由正弦定理,得 $c\sin A=\sqrt{3}$. ……(5 分)

(2)因为 $2(b\sin C-a\tan C)=c\tan C$,

由正弦定理,$2\left(\sin B\sin C-\sin A\cdot\frac{\sin C}{\cos C}\right)=\sin C\cdot\frac{\sin C}{\cos C}$, ……(6 分)

因为 $\sin C\neq0$,故 $2\cos C\cdot\sin B=2\sin A+\sin C=2\sin(B+C)+\sin C$, ……(7 分)

则 $2\cos C\cdot\sin B=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C+\sin C$,故 $2\cos B\sin C+\sin C=0$,

因为 $\sin C\neq0$,故 $\cos B=-\frac{1}{2}$,又 $B\in(0,\pi)$,故 $B=\frac{2\pi}{3}$, ……(9 分)

代入 $b\sin A\sin C-\sqrt{3}\sin B=0$ 中,得 $b\sin A\sin C=2\sin^2B$,即 $ac=2b$. ……(10 分)

由余弦定理,$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\geqslant3ac=6b$,故 $b\geqslant6$,

则 $ac\geqslant12$,当且仅当 $a=c=2\sqrt{3}$ 时等号成立;

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\geqslant3\sqrt{3}$,故实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,3\sqrt{3}]$. ……(12 分)

20.【命题立意】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)如图,连接 BM,因为 $SB\perp AB$,平面 $SBA\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $SBA\cap$ 平面 $ABCD=AB$,$SB\subset$ 平面 SBA,故 $SB\perp$ 平面 $ABCD$, ……(1 分)

而 $AC\subset$ 平面 $ABCD$,故 $SB\perp AC$. ……(2 分)

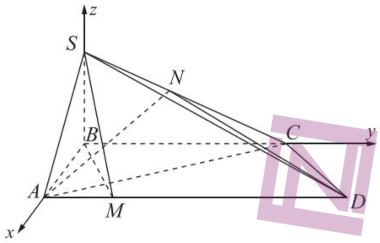
由平面几何知识可知 $BC=2\sqrt{3}$,故 $\frac{AM}{AB}=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

故 $\triangle ABM\backsim\triangle BCA$,故 $\angle ABM=\angle BCA$,故 $AC\perp BM$.

而 $SB\cap BM=B$,故 $AC\perp$ 平面 SBM, ……(4 分)

因为 $SM\subset$平面 SBM,故 $AC\perp SM$. ……………………………………………………………………(5分)

(2)由(1)得 $SB\perp$平面 $ABCD$,$AB\perp BC$,故以 B 为原点,BA,BC,BS 所在直线分别为 x、y、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.



易得 $A(1,0,0)$,$C(0,2\sqrt{3},0)$,$D(1,3\sqrt{3},0)$,$S(0,0,\sqrt{3})$, ……………………………………(6分)

所以$\overrightarrow{SC}=(0,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AS}=(-1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AD}=(0,3\sqrt{3},0)$.

设$\overrightarrow{SN}=\lambda\overrightarrow{SC}=(0,2\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$,$\lambda\in[0,1]$,

则$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SN}=(-1,2\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

设平面 ADN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}3\sqrt{3}y=0,\\ -x+2\sqrt{3}\lambda y+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,得 $x=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$,

则平面 ADN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0,1)$. ………………………………………(8分)

又因为平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,平面 ADN 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$,

……………………………………………………………………………………………(9分)

所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3(1-\lambda)^2+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}\left(\lambda=\frac{5}{3}\text{舍去}\right)$, ……………(11分)

故 $SN=\frac{1}{3}SC=\frac{\sqrt{15}}{3}$. ……………………………………………………………(12分)

21.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)设 $P(x_1,y_1)$,椭圆 C 的左、右顶点坐标分别为$(-a,0)$,$(a,0)$,

故$\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}{x_1^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$, ……………………………(2分)

故 $a^2=2b^2$,则 $c^2=a^2-b^2=b^2$. ……………………………………………………(3分)

而 $a-c=\sqrt{2}b-b=\sqrt{6}-\sqrt{3}$,解得 $b=\sqrt{3}$,则 $a=\sqrt{6}$, ……………………………(4分)

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………(5分)

(2)联立$\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}$ 即 $A(2,1)$. ……………………………(6分)

由题意可知$\angle PAQ$ 的内角平分线的斜率不存在,即该角平分线与 x 轴垂直,

设直线 AP 的斜率为 k,则直线 AQ 的斜率为 $-k$,

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,直线 AP 的方程为 $y-1=k(x-2)$,即 $y=kx+1-2k$,

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+1-2k, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4k(1-2k)x+8k^2-8k-4=0$, ……(8 分)

因为 P,A 为直线 AP 与椭圆的交点,所以 $2x_1=\dfrac{8k^2-8k-4}{2k^2+1}$,即 $x_1=\dfrac{4k^2-4k-2}{2k^2+1}$, ……(9 分)

把 k 换为 $-k$,得 $x_2=\dfrac{4k^2+4k-2}{2k^2+1}$,所以 $x_2-x_1=\dfrac{8k}{2k^2+1}$, ……(10 分)

所以 $y_2-y_1=(-kx_2+1+2k)-(kx_1+1-2k)=k[4-(x_1+x_2)]=\dfrac{8k}{2k^2+1}$, ……(11 分)

所以直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$,故直线 PQ 的斜率为定值 1. ……(12 分)

22.【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)令 $f(x)=0$,得 $m(\ln x-1)=x$,

显然 $m\neq0$,故 $\dfrac{\ln x-1}{x}=\dfrac{1}{m}$. ……(1 分)

令 $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}$,则 $g'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$, ……(2 分)

令 $g'(x)=0$,解得 $x=e^2$,故当 $x\in[3,e^2)$ 时,$g'(x)>0$,当 $x\in(e^2,9]$ 时,$g'(x)<0$,

故函数 $g(x)$ 在 $[3,e^2)$ 上单调递增,在 $(e^2,9]$ 上单调递减, ……(3 分)

而 $g(3)=\dfrac{\ln3-1}{3}$,$g(9)=\dfrac{\ln9-1}{9}=\dfrac{2\ln3-1}{9}$,$g(e^2)=\dfrac{\ln e^2-1}{e^2}=\dfrac{1}{e^2}$, ……(4 分)

因为 $g(3)<g(9)$,所以实数 $\dfrac{1}{m}$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{2\ln3-1}{9},\dfrac{1}{e^2}\right)$,

故 m 的取值范围为 $\left(e^2,\dfrac{9}{2\ln3-1}\right]$. ……(5 分)

(2)设 $h(x)=f(x)+m^2-f'(x)-1=mx\ln x-x^2-(m-2)x+m^2-1-m\ln x(x\geqslant1)$, ……(6 分)

故 $h'(x)=m\ln x-2x+2-\dfrac{m}{x}(x\geqslant1)$, ……(7 分)

故 $h''(x)=m\cdot\dfrac{1}{x}-2+\dfrac{m}{x^2}=m\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)-2(x\geqslant1)$, ……(8 分)

因为 $h(1)=m(m-1)\leqslant0$,所以 $0\leqslant m\leqslant1$, ……(9 分)

当 $0\leqslant m\leqslant1$ 时,$\forall x\in[1,+\infty)$,$h''(x)=m\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)-2<m\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1^2}\right)-2\leqslant0$,

故 $h'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减, ……(10 分)

故 $\forall x\in[1,+\infty)$,$h'(x)<h'(1)=-m\leqslant0$,

从而 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,故 $\forall x\in[1,+\infty)$,$h(x)\leqslant h(1)\leqslant0$,

故实数 m 的取值范围为 $[0,1]$. ……(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。