绝密★启用前　　　　试卷类型：A

# 高三数学试题

2022. 5

本试卷共4页，共22小题，满分150分，考试用时120分钟.

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时，选出每个小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将答题卡交回.

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{N}|-2<x<4\}$，$A=\{0,1\}$，则 $\complement_U A=$

A. $\{-1,2,3\}$　　B. $\{-1,0,2,3\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{2,3\}$

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设直线 $BD_1$ 与直线 $AD$ 所成的角为 $\alpha$，直线 $BD_1$ 与平面 $CDD_1C_1$ 所成的角为 $\beta$，则 $\alpha+\beta=$

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则"$\mu\geqslant1$"是"$P(X<2)<\frac{1}{2}$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(2)=-1$，则满足 $f(x-3)\geqslant-1$ 的 $x$ 的取值范围是

A. $[1,5]$　　B. $[1,3]$　　C. $[3,5]$　　D. $[-2,2]$

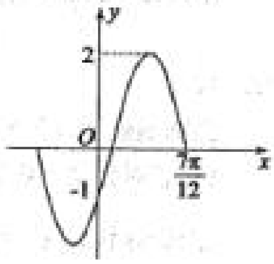
5. 在 $\triangle ABC$ 中，$M$ 为 $BC$ 边上任意一点，$N$ 为线段 $AM$ 上任意一点，若 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是

A. $[0,\frac{1}{3}]$　　B. $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$　　C. $[0,1]$　　D. $[1,2]$

6. 已知直线 $l:(m^2+m+1)x+(3-2m)y-2m^2-5=0$，圆 $C:x^2+y^2-2x=0$，则直线 $l$ 与圆 $C$ 的位置关系是

A. 相离　　B. 相切　　C. 相交　　D. 不确定

7. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，现将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 的表达式可以为



A. $g(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　B. $g(x)=2\cos(x-\frac{\pi}{3})$

C. $g(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$　　D. $g(x)=2\cos(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3})$

8. 已知椭圆 $C_1$ 和双曲线 $C_2$ 有相同的左、右焦点 $F_1$，$F_2$，若 $C_1$，$C_2$ 在第一象限内的交点为 $P$，且满足 $\angle POF_2=2\angle PF_1F_2$，设 $e_1$，$e_2$ 分别是 $C_1$，$C_2$ 的离心率，则 $e_1$，$e_2$ 的关系是

A. $e_1e_2=2$　　B. $e_1^2+e_2^2=2$

C. $e_1^2+e_1e_2+e_2^2=2$　　D. $e_1^2+e_2^2=2e_1^2e_2^2$

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9. 欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$（本题中 e 为自然对数的底数，i 为虚数单位）是由瑞士著名数学家欧拉创立，该公式建立了三角函数与指数函数的关系，在复变函数论中占有非常重要的地位，被誉为"数学中的天桥"，依据欧拉公式，则下列结论中正确的是

A. 复数 $e^{i\frac{\pi}{2}}$ 为纯虚数

B. 复数 $e^{i2}$ 对应的点位于第二象限

C. 复数 $e^{i\frac{\pi}{6}}$ 的共轭复数为 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

D. 复数 $e^{i\theta}(\theta\in\mathbb{R})$ 在复平面内对应的点的轨迹是圆

10. 若实数 $a$，$b$ 满足 $\ln b<\ln a<0$，则下列结论中正确的是

A. $a^2<b^2$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $\log_a 3<\log_b 3$　　D. $a^b>b^a$

11. 设函数 $f(x)=|\cos x|+\cos 2x$，则下列结论中正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$　　B. $f(x)$ 在 $[0,\frac{2\pi}{3}]$ 单调递减

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称　　D. $f(x)$ 的值域为 $[-1,2]$

12. 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，如图 1 所示，$E$，$F$，$M$ 分别为 $BC$，$CD$，$BE$ 的中点，分别沿 $AE$，$AF$ 及 $EF$ 所在直线把 $\triangle AEB$，$\triangle AFD$ 和 $\triangle EFC$ 折起，使 $B$，$C$，$D$ 三点重合于点 $P$，得到三棱锥 $P$-$AEF$，如图 2 所示，则下列结论中正确的是

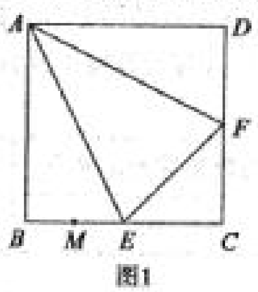


图1

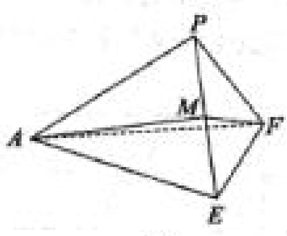


图2

A. $PA\perp EF$

B. 三棱锥 $M$-$AEF$ 的体积为 4

C. 三棱锥 $P$-$AEF$ 外接球的表面积为 $24\pi$

D. 过点 $M$ 的平面截三棱锥 $P$-$AEF$ 的外接球所得截面的面积的取值范围为 $[\pi,6\pi]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\log_2\sin15^\circ-\log_{\frac{1}{2}}\cos345^\circ=$________.

14. 某社区对在抗击疫情工作中表现突出的 3 位医生、2 位护士和 1 位社区工作人员进行表彰并合影留念. 现将这 6 人随机排成一排，则 3 位医生中有且只有 2 位相邻的概率为______.

15. 在△$ABC$ 中，内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，若 $a+c=4$，且 $\sin A,\sin B,\sin C$ 成等差数列，则△$ABC$ 的面积的最大值为________.

16. 某资料室在计算机使用中，出现如表所示的以一定规则排列的编码，表中的编码从左至右以及从上至下都是无限的. 此表中，主对角线上的数字构成的数列 1，2，5，10，17，…的通项公式为_________，编码 99 共出现________次.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | … |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | … |
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | … |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | … |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | … |
| … | … | … | … | … | … | … |

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

锐角△$ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，已知$\sqrt{3}b\cos C=2a\sin A-\sqrt{3}c\cos B$.

(1)求 $A$；

(2)若 $b=2$，$D$ 为 $AB$ 的中点，求 $CD$ 的取值范围.

18.（12 分）

新能源汽车是指除汽油、柴油发动机之外的所有其他能源汽车，被认为能减少空气污染和缓解能源短缺的压力. 在当今提倡全球环保的前提下，新能源汽车越来越受到消费者的青睐，新能源汽车产业也必将成为未来汽车产业发展的导向与目标. 某车企随机调查了今年 3 月份购买本车企生产的汽车的 100 位车主，经统计其购车种类与性别情况如下表：

单位：人

| | 购置新能源汽车 | 购置传统燃油汽车 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男性 | 50 | 10 | 60 |
| 女性 | 25 | 15 | 40 |
| 总计 | 75 | 25 | 100 |

(1)根据表中数据，在犯错误的概率不超过 2.5%的前提下，是否可以认为购车种类与性别有关；

(2)用样本估计总体,用本车企售出汽车样本的频率代替售出汽车的概率,从该车企今年3月份售出的汽车中,随机抽取3辆汽车,设被抽取的3辆汽车中属于传统燃油汽车的辆数为$X$,求$X$的分布列及数学期望.

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

| $\alpha=P(\chi^2\geqslant k)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

19.(12分)

已知公差为$d$的等差数列$\{a_n\}$和公比$q<0$的等比数列$\{b_n\}$中,$a_1=b_1=1$,$a_2+b_3=3$,$a_3+b_2=2$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

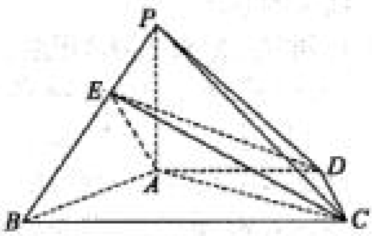
(2)令$c_n=3^{a_n}\cdot b_n^2(n\in\mathbf{N}^*)$,抽去数列$\{c_n\}$的第3项、第6项、第9项、……、第$3n$项、……,余下的项的顺序不变,构成一个新数列$\{t_n\}$,求数列$\{t_n\}$的前$n$项和$S_n$.

20.(12分)

如图,在四棱锥$P$-$ABCD$中,$PA\perp$底面$ABCD$,底面$ABCD$是等腰梯形,$AD//BC$,$BC=2AB=2AD=6\sqrt{2}$,$E$是$PB$上一点,且$PB=3PE$.

(1)求证:$PD//$平面$AEC$;

(2)已知平面$AEC\perp$平面$PBC$,求二面角$A$-$CE$-$D$的余弦值.




21.(12分)

已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$在点$M(1,y_0)$处的切线斜率为$\frac{1}{2}$.

(1)求抛物线$C$的方程;

(2)若抛物线$C$上存在不同的两点关于直线$l:y=2x+m$对称,求实数$m$的取值范围.

22.(12分)

已知函数$f(x)=x-\ln x$.

(1)若对任意$x\in(0,+\infty)$,$f(x)\geqslant mx-1$恒成立,求实数$m$的取值范围;

(2)设函数$h(x)=f(x)+(2-x)e^x$在$(\frac{1}{2},1)$上的最小值为$a$,求证:$(a-3)(a-4)<0$.

# 高三数学试题参考答案

2022.5

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.D 2.C 3.B 4.A 5.C 6.D 7.B 8.D

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分。

9.ABD 10.BCD 11.AD 12.ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $-2$ 14. $\frac{3}{5}$ 15. $\sqrt{3}$ 16. $a_n=n^2-2n+2$ 6

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

解：(1)因为 $\sqrt{3}b\cos C=2a\sin A-\sqrt{3}c\cos B$，

由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\cos C=2\sin A\sin A-\sqrt{3}\sin C\cos B$. ······ 1分

所以 $\sqrt{3}(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=2\sin^2 A$，

所以 $\sqrt{3}\sin(B+C)=2\sin^2 A$， ······ 2分

因为 $A+B+C=\pi$，即 $B+C=\pi-A$，

所以 $\sqrt{3}\sin A=2\sin^2 A$， ······ 3分

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$， ······ 4分

又因为△ABC为锐角三角形，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ······ 5分

(2)由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$，又 $b=2$，

在△ACD中，由余弦定理得

$CD=\sqrt{AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos A}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2-4c+16}$. ······ 6分

因为△ABC为锐角三角形，

方法一：

所以 $\begin{cases}\cos B>0,\\ \cos C>0,\end{cases}$ ······ 7分

由余弦定理，得 $\begin{cases} a^2+c^2-b^2>0, \\ a^2+b^2-c^2>0. \end{cases}$ …………………………………… 8分

又 $a^2=c^2+4-2c$， …………………………………… 9分

所以 $\begin{cases} c^2-c>0, \\ 2c-8<0, \end{cases}$ 解得 $1<c<4$.

所以由二次函数性质求得 $CD$ 的取值范围是 $[\sqrt{3},2)$. …………………………………… 10分

方法二：

所以 $\begin{cases} 0<B<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0<C<\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ …………………………………… 6分

又 $C=\dfrac{2\pi}{3}-B$，

所以 $\begin{cases} 0<B<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ 解得 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$. …………………………………… 7分

在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理，得 $\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以 $c=\dfrac{2\sin C}{\sin B}=\dfrac{2\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}\cos B+\sin B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan B}+1$， …………………………………… 8分

因为 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\tan B>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $1<c<4$. …………………………………… 9分

所以由二次函数性质求得 $CD$ 的取值范围是 $[\sqrt{3},2)$. …………………………………… 10分

18.（12分）

解：(1)零假设为 $H_0$：购车种类与性别无关联.（不写不扣分）

根据列联表中的数据，经计算得到

$\chi^2=\dfrac{100\times(15\times50-10\times25)^2}{25\times75\times60\times40}$ …………………………………… 1分

$=\dfrac{50}{9}>5.024$. …………………………………… 3分

所以在犯错误的概率不超过2.5%的前提下，可以认为购置新能源汽车与性别有关；……………… 4分

(2)随机抽取1辆汽车属于传统燃油汽车的概率为$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$，……………… 5分

所以被抽取的3辆汽车中属于传统燃油汽车的辆数$X\sim B(3,\frac{1}{4})$，……………… 6分

则$P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64}$，

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{1}{4})^2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$，$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^0=\frac{1}{64}$．……………… 8分

则$X$的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

……………… 10分

$E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$．……………… 12分

19.(12分)

解：(1)由题意得$\begin{cases}1+d+q^2=3,\\1+2d+q=2,\end{cases}$ ……………… 1分

整理得$2q^2-q-3=0$，……………… 2分

解得$q=\frac{3}{2}$，或$q=-1$．因为公比$q<0$，所以$q=-1$，则$d=1$．……………… 3分

所以$a_n=1+(n-1)=n$，$b_n=(-1)^{n-1}$．……………… 4分

(2)$c_n=3^{a_n}\cdot b_n^2=3^n$．……………… 5分

当$n=2k(k\in N^*)$时，

$S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{2k}$

$=(c_1+c_3+\cdots+c_{2k})-(c_2+c_4-\cdots+c_{2k})$ ……………… 7分

$=\frac{3-3\times3^{2k}}{1-3}-\frac{3^1-3^{2k}\times3^1}{1-3^2}=\frac{12\times3^{2k}-12}{26}=\frac{6\times3^{2k}-6}{13}=\frac{6\times3^{n}-6}{13}$．……………… 9分

当$n=2k-1(n\in N^*)$时，

$S_n=S_{2k-1}=S_{2k}-c_{2k-1}$

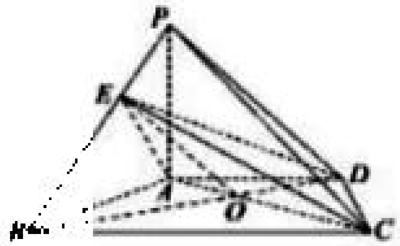
$=\dfrac{6\times3^{m}-6}{13}-3^{m-1}=\dfrac{5\times3^{m-1}-6}{13}$

$=\dfrac{5\times3^{\frac{n-1}{2}}-6}{13}$. ………………………………………………………… 11 分

综上，$S_n=\begin{cases}\dfrac{6\times3^{\frac{n}{2}}-6}{13}, n\text{ 为偶数}, \\ \dfrac{5\times3^{\frac{n+1}{2}}-6}{13}, n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ ………………………………………………………… 12 分

20.（12 分）

（1）证明：如图，连接 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$，连接 $EO$. ………………………………………… 1 分




因为 $AD\parallel BC$，$BC=2AD$，

所以 $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BC}{AD}=2$， ………………………………………………………… 2 分

又 $BE=2PE$，所以 $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BE}{EP}$，

所以 $OE\parallel PD$， ………………………………………………………… 3 分

又 $OE\subset$ 平面 $AEC$，$PD\not\subset$ 平面 $AEC$，

所以 $PD\parallel$ 平面 $AEC$. ………………………………………………………… 4 分

（2）取 $BC$ 的中点 $F$，连接 $AF$.

因为 $AD\parallel BC$，$BC=2AD$，

所以 $AD=FC$，$AD\parallel FC$，

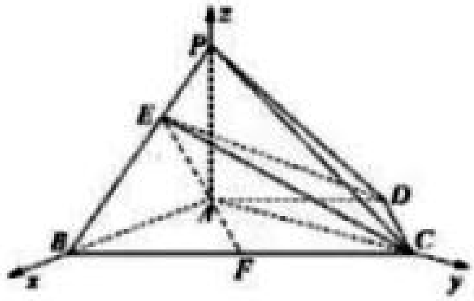
所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形，

又 $AB=CD=AD$，

所以 $BC=2AF$，所以 $AC\perp AB$. ………………………………………………………… 5 分

方法一：

以 $A$ 为坐标原点，分别以 $AB$，$AC$，$AP$ 所在直线为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A$-$xyz$.




设 $PA=3a$，则 $A(0,0,0)$，$E(\sqrt{2},0,2a)$，$B(3\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,3a)$，$C(0,3\sqrt{6},0)$.

所以 $\overrightarrow{AC}=(0,3\sqrt{6},0)$，$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{2},0,2a)$，$\overrightarrow{PB}=(3\sqrt{2},0,-3a)$，$\overrightarrow{BC}=(-3\sqrt{2},3\sqrt{6},0)$.

………………………………………………………………………………………… 6 分

设平面 $AEC$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1+2az_1=0,\\ y_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{2}a$，得平面 $AEC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{2}a,0,-1)$. ………………………… 8 分

设平面 $PBC$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3\sqrt{2}x_2-3az_2=0,\\ -3\sqrt{2}x_2+3\sqrt{6}y_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=a$，得 $\boldsymbol{n}_2=(a,\frac{\sqrt{3}a}{3},\sqrt{2})$. ………………………………………………………… 9 分

因为平面 $AEC\perp$ 平面 $PBC$，

所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，得 $\sqrt{2}a^2-\sqrt{2}=0$，解得 $a=1$. ……………………………………… 10 分

所以 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{2},0,-1)$，$E(\sqrt{2},0,2)$，$D(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2},0)$.

$\overrightarrow{EC}=(-\sqrt{2},3\sqrt{6},-2)$，$\overrightarrow{DC}=(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2},0)$.

设平面 $ECD$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_3=(x_3,y_3,z_3)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_3\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_3\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{3\sqrt{6}}{2}y_3=0,\\ -\sqrt{2}x_3-3\sqrt{6}y_3-2z_3=0.\end{cases}$

令 $x_3=\sqrt{3}$，解得 $\boldsymbol{n}_3=(\sqrt{3},-1,-2\sqrt{6})$. ………………………………………………… 11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_3\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_3|}=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times\sqrt{28}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

所以二面角 $A$-$CE$-$D$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. ………………………………………………… 12 分

方法二：

又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AC\perp PA$。

又 $PA\cap AB=A$，$PA$，$AB\subset$ 平面 $PAB$，

所以 $AC\perp$ 平面 $PAB$，

所以 $AC\perp PB$。 ………………………………………………………………………… 6 分

作 $AH\perp CE$，垂足为 $H$。

因为平面 $AEC\perp$ 平面 $PBC$，平面 $AEC\cap$ 平面 $PBC=EC$，

所以 $AH\perp$ 平面 $PBC$，又 $PB\subset$ 平面 $PBC$，

所以 $PB\perp AH$。

又 $AH\cap AC=A$，$AH$，$AC\subset$ 平面 $AEC$，

所以 $PB\perp$ 平面 $AEC$，

又 $AE\subset$ 平面 $AEC$，

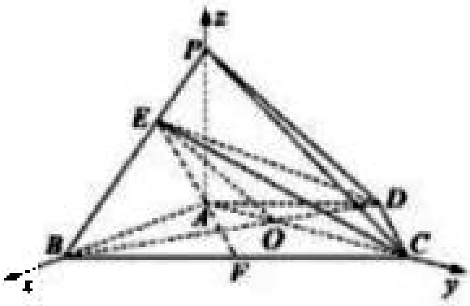
所以 $PB\perp AE$， ………………………………………………………………………… 7 分

所以 $Rt\triangle PBA\backsim Rt\triangle ABE$，

所以 $AB^2=BE\cdot BP=6PE^2$，又 $AB=3\sqrt{2}$，

所以 $PE=\sqrt{3}$，$BP=3\sqrt{3}$，$PA=3$。 ………………………………………………… 8 分

以 $A$ 为坐标原点，分别以 $AB$，$AC$，$AP$ 所在直线为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$。




则 $B(3\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,3)$，$E(\sqrt{2},0,2)$，$C(0,3\sqrt{6},0)$，$D(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(3\sqrt{2},0,-3)$，$\overrightarrow{EC}=(-\sqrt{2},3\sqrt{6},-2)$，$\overrightarrow{DC}=(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2},0)$， ………… 9 分

设平面 $ECD$ 的一个法向量 $n=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{DC}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{EC}=0, \end{cases} 即 \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{6}}{2}y=0, \\ -\sqrt{2}x+3\sqrt{6}y \end{cases}$$

令 $x=\sqrt{3}$，解得 $n=(\sqrt{3},-1,-2\sqrt{6})$. ………………………………………… 10 分

又 $\overrightarrow{PB}=(3\sqrt{2},0,-3)$是平面 AEC 的一个法向量， ……………………………… 11 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PB},n\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot n}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|n|}=\dfrac{3\sqrt{6}+6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}\times2\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，

所以二面角 A-CE-D 的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$. ………………………………………… 12 分

21.（12 分）

解：(1)因为 $y=\dfrac{1}{2p}x^2$，所以，$y'=\dfrac{1}{p}x$， ………………………………………… 1 分

所以，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2}$，即 $p=2$. ………………………………………………………… 2 分

所以，抛物线 $C:x^2=4y$. ………………………………………………………… 3 分

(2)设抛物线 C 上，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点关于直线 $y=2x+m$ 对称，故可设直线 AB 的方程为

$y=-\dfrac{1}{2}x+t$， ………………………………………………………… 4 分

由$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x+t,\\x^2=4y,\end{cases}$ 可得 $x^2+2x-4t=0$， ………………………………… 5 分

所以 $x_1+x_2=-2$， ………………………………………………………… 7 分

$y_1+y_2=(-\dfrac{1}{2}x_1+t)+(-\dfrac{1}{2}x_2+t)=-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+2t=2t+1$. ……………… 8 分

设线段 AB 的中点为$M(x_0,y_0)$，

所以 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-1$，$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2t+1}{2}$. ……………………………… 9 分

因为点 $M(x_0,y_0)$在直线 $l:y=2x+m$ 上，

所以$\dfrac{2t+1}{2}=-2+m$，即 $t=m-\dfrac{5}{2}$， ………………………………………… 10 分

所以由 $\Delta=2^2-4\times(-4t)>0$，得 $t>-\dfrac{1}{4}$，

所以 $t=m-\dfrac{5}{2}>-\dfrac{1}{4}$，所以 $m>\dfrac{9}{4}$. ………………………………………… 11 分

故 $m$ 的取值范围是$(\dfrac{9}{4},+\infty)$. ………………………………………… 12 分

22.（12分）

解：(1)若对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant mx-1$ 恒成立，

则 $m\leqslant 1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $t(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$，$t'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-2}{x^2}$. ………………………… 3分

由 $t'(x)<0$，得 $0<x<e^2$，由 $t'(x)>0$，得 $x>e^2$，

所以 $t(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递减，在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递增，………………………… 4分

所以 $t(x)_{\min}=t(e^2)=1-\frac{1}{e^2}$，所以 $m\leqslant 1-\frac{1}{e^2}$.

故实数 $m$ 的取值范围为 $(-\infty,1-\frac{1}{e^2}]$. ………………………… 5分

(2) $h(x)=f(x)-(2-x)e^x=(2-x)e^x+x-\ln x$，

则 $h'(x)=(1-x)e^x+1-\frac{1}{x}=(1-x)(e^x-\frac{1}{x})$，………………………… 6分

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$1-x>0$，令 $g(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

则 $g'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上单调递增，

因为 $g(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$g(1)=e-1>0$，………………………… 7分

所以存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $g(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，故 $\ln x_0=-x_0$. ………………………… 8分

所以当 $x\in(\frac{1}{2},x_0)$ 时，$g(x)<0$，此时 $h'(x)<0$，

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g(x)>0$，此时 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{2},x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增，………………………… 9分

则 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上的最小值 $a=h(x_0)=(2-x_0)e^{x_0}+x_0-\ln x_0$

$=(2-x_0)\frac{1}{x_0}+x_0+x_0=2x_0+\frac{2}{x_0}-1$，$x_0\in(\frac{1}{2},1)$. ………………………… 10分

令 $G(x)=2x+\frac{2}{x}-1$，$x\in(\frac{1}{2},1)$，则 $G'(x)=2-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^2-1)}{x^2}<0$，

所以当 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 时，$G(x)$ 单调递减，$G(x)>G(1)=3$，$G(x)<G(\frac{1}{2})=4$，…… 11分

所以 $3<a<4$，故 $(a-3)(a-4)$ ………………………… 12分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。