

湖南师大附中 2022-2023 学年度高二第二学期第二次大练习

数 学

时量：120 分钟 满分：150 分

得分：_____

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，满分 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \ln(x^2 + 1) > 0$ ”的否定为 ()

- A. $\forall x \notin \mathbf{R}, \ln(x^2 + 1) \leq 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, \ln(x^2 + 1) \leq 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, \ln(x^2 + 1) \leq 0$ D. $\exists x \notin \mathbf{R}, \ln(x^2 + 1) \leq 0$

2. 已知实数集合 $A = \{1, a, b\}$, $B = \{a^2, a, ab\}$, 若 $A = B$, 则 $a + b =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. 已知 $a \neq 0$, 命题 p : $x = 1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根, 命题 q : $a + b + c = 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 充分必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是两个不共线的向量, 若向量 $\mathbf{m} = -\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2$ ($k \in \mathbf{R}$) 与向量 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1$ 共线, 则 ()

- A. $k = 0$ B. $k = 1$ C. $k = 2$ D. $k = \frac{1}{2}$

5. 若两个正实数 x, y 满足 $4x + y = xy$, 且存在这样的 x, y , 使不等式 $x + \frac{y}{4} < m^2 + 3m$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 4)$ B. $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$
C. $(-4, 1)$ D. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

6. 若 $\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\tan^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} =$ ()

- A. $-\frac{21}{4}$ B. $\frac{21}{4}$ C. $-\frac{21}{8}$ D. $\frac{21}{8}$

7. 已知 $a = \ln \sqrt[3]{3}$, $b = e^{-1}$, $c = \frac{3 \ln 2}{8}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $b > c > a$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

8. 设 $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 若 $a + b + c = 0$, $f(0) \cdot f(1) > 0$, 则下列说法错误的是 ()

- A. $a \neq 0$

B. 方程 $f(x) = 0$ 有实根, 且 $-2 < \frac{b}{a} < -1$

C. 设 x_1, x_2 是方程 $f(x) = 0$ 的两个实根, 则 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq |x_1 - x_2| < \frac{2}{3}$

D. 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有且只有一个实根

二、选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 满分 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $b < a < 0$, 则 $bc^2 < ac^2$

B. 若 $b > a > 0 > c$, 则 $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$

C. 若 $c > b > a > 0$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

D. 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

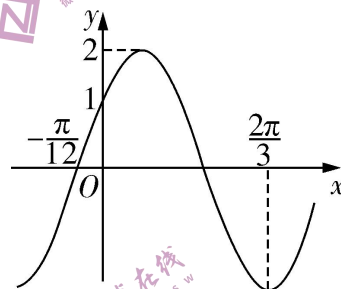
10. 如图是函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象, 则 ()

A. $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

B. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 单调递增

C. 直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

D. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位得到函数 $g(x) = 2\sin 2x$ 的图象



11. 已知定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} 4 - 8\left|x - \frac{3}{2}\right|, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right), & x > 2 \end{cases}$, 下列结论正确的为 ()

A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 4]$

B. 存在 $x_0 \in [1, 8]$, 使得不等式 $x_0 f(x_0) > 6$ 成立

C. 当 $x \in [2^{n-1}, 2^n]$ 时, 函数的图象与 x 轴围成的面积为 S , 则 $S = 2$

D. 当 $x \in [7, +\infty)$ 时, $f(x) \leq \frac{1}{2}$

12. 对于两个均不等于 1 的正数 m 和 n , 定义: $m * n = \min\{\log_m n, \log_n m\}$, 则下列结论正确的是 ()

A. 若 $a > 1$, 且 $3 * a = 2 * 4$, 则 $a = 9$

B. 若 $a \geq b \geq c > 1$, 且 $\frac{a * b}{b * c} = c * a$, 则 $b = c$

C. 若 $0 < a < b < c < 1$, 则 $a * b - a * c = a * \left(\frac{b}{c}\right)$

D. 若 $0 < a < b < c < 1$, $x > y > z > 0$, 则 $(a^x * b^y) \cdot (b^y * c^z) = 2(a^x * c^z)$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 对任意的非负实数 x, y 都成立，且 $f(1) = 4$ ，则

$$\frac{f(1)}{f(0)} + \frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \cdots + \frac{f(2010)}{f(2009)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于直线 $x=2$ 对称. 当 $x \in [0, 4]$ 时，

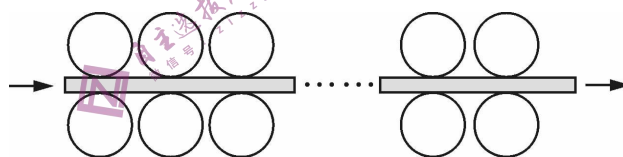
$$f(x) = x^2 - 4x, \text{ 则 } f(2022) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调，其中 ω 为正整数， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，且

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right). \text{ 则 } y = f(x) \text{ 图象的一条对称轴为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

16. 如图为一台冷轧机的示意图. 冷轧机由若干对轧辊组成，厚度为 α （单位：mm）的带钢从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出，厚度变为 β （单位：mm）. 若 $\alpha = 10$ ， $\beta = 5$ ，每对轧辊的减薄率 r 不超过 4%，则冷轧机至少需要安装轧辊的对数为_____.

（一对轧辊减薄率 $r = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \times 100\%$, $\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$ ）



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时，

列表并填入了部分数据，如表：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

- (1) 请将上表数据补充完整, 填写在相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ ($\theta > 0$) 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象。若 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 求 θ 的最小值.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ($x \neq 0$).

(1) 分别计算 $f(2) + f(\frac{1}{2})$, $f(3) + f(\frac{1}{3})$ 的值;

(2) 证明你发现的规律并利用规律计算

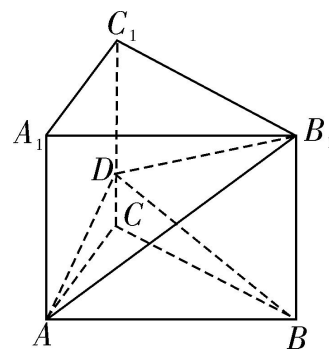
$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2022) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \cdots + f(\frac{1}{2022})$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=2$, $BC=3$, $AB=\sqrt{13}$, D 为 CC_1 上一点, 且 $CD: C_1D=4: 9$.

(1) 证明: 平面 $AB_1D \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;

(2) 若直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{39}{2}$, 求二面角 $A-B_1D-B$ 的余弦值.



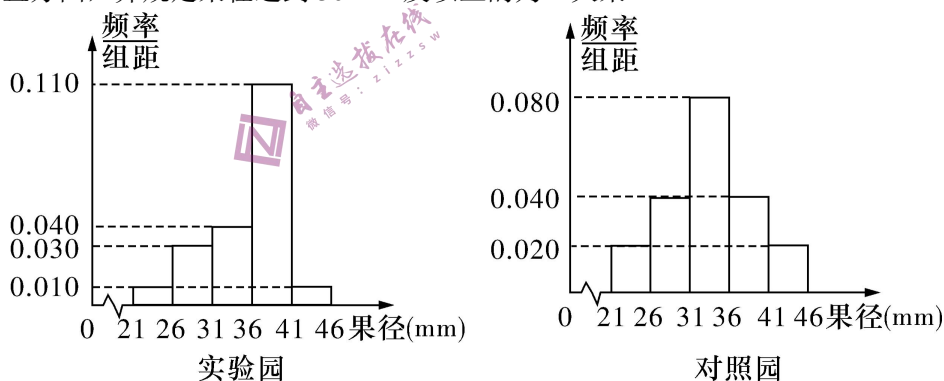
20. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别是 a 、 b 、 c , 且 $\frac{2\sin A - \sin C}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2}$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 $C = \frac{\pi}{2}$, $BC=2$, O 为 BC 中点, P 为线段 AO 上一点, 且满足 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$, 求 AP 的值, 并求此时 $\triangle BPC$ 的面积 S .

21. (本小题满分 12 分)

某种水果按照果径大小可分为四类: 标准果、优质果、精品果、礼品果, 一般地, 果径越大售价越高. 为帮助果农创收, 提高水果的果径, 某科研小组设计了一套方案, 并在两片果园中进行对比实验, 其中实验园采用实验方案, 对照园未采用. 实验周期结束后, 分别在两片果园中各随机选取 100 个果实, 按果径分成 5 组进行统计: $[21, 26)$, $[26, 31)$, $[31, 36)$, $[36, 41)$, $[41, 46]$ (单位: mm). 统计后分别制成如下的频率分布直方图, 并规定果径达到 36 mm 及以上的为“大果”.



- (1) 估计实验园的“大果”率;
- (2) 现采用分层抽样的方法从对照园选取的 100 个果实中抽取 10 个, 再从这 10 个果实中随机抽取 3 个, 记其中“大果”的个数为 X , 求 X 的分布列;
- (3) 以频率估计概率, 从对照园这批果实中随机抽取 n ($n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}^*$) 个, 设其中恰有 2 个“大果”的概率为 $P(n)$, 当 $P(n)$ 最大时, 写出 n 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 以椭圆的顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 我们称圆心在椭圆 C 上运动且半径为 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$ 的圆是椭圆 C 的“环绕圆”. 过原点 O 作椭圆 C 的“环绕圆”的两条切线, 分别交椭圆 C 于 A, B 两点, 若直线 OA, OB 的斜率存在, 并记为 k_1, k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的取值范围.

