辽宁省实验中学2023届高三第五次模拟考试

数学试卷答案

一、单选题：1. D　2. B　3. A　4. C　5. B　6. D　7. C　8. A

二、多选题：9. AC　10.　BD　11. BCD 12. BCD

三、填空题：13.　$\frac{36}{125}$　14.　$\frac{n}{4n+4}$　15.　$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　16.　$\frac{4}{3}$

四、解答题：

17.（1）依题意可知 $\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos A\cos B}$，

$\therefore \frac{3}{4}=\cos A\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))=\frac{1}{2}(-\cos C+\cos(A-B))$，$\therefore \cos(A-B)=\frac{3}{2}+\cos C$，

又$\because \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \cos C=\pm\frac{1}{2}$，$\therefore \cos(A-B)=2$（舍去）或 1，$\therefore \cos C=-\frac{1}{2}$，且 $A-B=0$，

$\therefore C=\frac{2}{3}\pi, A=B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore \tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

（2）不妨取 $AC=BC=3$，$\therefore CD=2$，$\therefore AD=\sqrt{3^2+2^2-2\times(-\frac{1}{2})\times2\times3}=\sqrt{19}$，

$\therefore \cos\angle ADC=\frac{4+19-9}{4\sqrt{19}}=\frac{7}{38}\sqrt{19}$。

18.（1）依题意变量 X 可取值为 3，4，5，6，7，9，其对应的概率分别为：

$P(X=3)=0.3\times0.3=0.09$，$P(X=4)=C_2^1 0.2\times0.3=0.12$，$P(X=5)=0.2\times0.2=0.04$，

$P(X=6)=C_2^1 0.5\times0.3=0.3$，$P(X=7)=C_2^1 0.5\times0.2=0.2$，$P(X=9)=0.5\times0.5=0.25$。

∴X 的分布列为：

X	3	4	5	6	7	9
P	0.09	0.12	0.04	0.3	0.2	0.25

∴X 的期望为 $E(X)=0.09\times3+0.12\times4+0.04\times5+0.3\times6+0.2\times7+0.25\times9=6.4$ 分。

（2）取事件 A 为陈涛取得进球或者助攻，则 $\bar{A}$ 为未进球或助攻，$\therefore P(A)=\frac{30}{40}=0.75$，

$\therefore P(\bar{A})=1-0.75=0.25$，事件 B 为中国队获胜，则 $P(B|A)=0.8$，$P(B|\bar{A})=0.2$，

$\therefore P(B)=P(B|\bar{A})P(\bar{A})+P(B|A)P(A)=0.2\times0.25+0.8\times0.75=0.65$，

$\therefore P(\bar{B})=1-0.65=0.35$，又$\because P(A\bar{B})=P(\bar{B}|A)P(A)=(1-0.8)\times 0.75=0.15$，

$\therefore P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{3}{7}$，即在中国队输给德国队的前提下，陈涛进球或助攻的概率为$\dfrac{3}{7}$。

19.（1）依题意 $a_2=\dfrac{3\times\frac{3}{4}+4}{7-\frac{3}{4}}=1, a_3=\dfrac{3\times 1+4}{7-1}=\dfrac{7}{6}, a_4=\dfrac{3\times\frac{7}{6}+4}{7-\frac{7}{6}}=\dfrac{9}{7}, a_5=\dfrac{3\times\frac{9}{7}+4}{7-\frac{9}{7}}=\dfrac{11}{8}$，

猜测 $a_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$，以下用数学归纳法证明。

证明：已知 $n=1,2,3,4,5$ 时 $a_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$ 成立

假设 $n=k(k\in N_+)$ 时，$a_k=\dfrac{2k+1}{k+3}$ 成立，则 $a_{n+1}=\dfrac{3a_k+4}{7-a_k}=\dfrac{3\times\frac{2k+1}{k+3}+4}{7-\frac{2k+1}{k+3}}=\dfrac{2k+3}{k+4}=\dfrac{2(k+1)+1}{(k+1)+3}$，亦符合猜想，综上，$a_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$ 成立。

（2）取 $b_n=1.1^n(2-a_n)=\dfrac{5\times 1.1^n}{n+3}$，$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{5\times 1.1^{n+1}}{n+4}-\dfrac{5\times 1.1^n}{n+3}=\dfrac{0.5\times 1.1^n}{(n+3)(n+4)}(n-7)$，$\therefore$ 当 $n=1,2,3,4,5,6$ 时，$b_{n+1}<b_n$，当 $n=8,9,10,\ldots$ 时，$b_{n+1}>b_n$，$\therefore b_7=b_8=\dfrac{1}{2}\times 1.1^7$ 为数列 $\{b_n\}$ 的最小项，所以 k 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{1}{2}\times 1.1^7)$。

20.（1）F 为靠近点 D 的三等分点，或 $FD=4$。

（2）$\because$ 翻折前 $DF=2AE, DC=2AB$，$\therefore$ 将 DA,FE,CB 延长一倍，三线交予点 O，已知等腰直角三角形 ODF 中 $DE\perp OF$，$\therefore A'BE-D'CF$ 中 $D'E\perp OF$，又$\because$ 二面角 $A'-EF-B$ 为直二面角，$\therefore D'E\perp$ 面 EFC。$\therefore$ 三棱锥 $D'-OFC$ 的体积为 $V_{D'-OFC}=\dfrac{1}{3}D'E\cdot\dfrac{1}{2}FC\cdot OD=\dfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=\dfrac{32}{3}\sqrt{2}$，

又 $\because$ 三棱锥 $A'-OBE$ 的体积 $V_{A'-OBE}=\dfrac{1}{8}V_{D'-OFC}=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$，$\therefore$ 棱台 $A'BE-D'CF$ 的体积为 $V_{A'BE-D'CF}=\dfrac{32}{3}\sqrt{2}-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}=\dfrac{28}{3}\sqrt{2}$。在线段 DC 上取 $DG=2$，$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DG}$，$\therefore$ 四边形 $AEGD$ 为平行四边形，$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EG}$，$\therefore EG\perp EB$，又$\because D'E\perp$ 面 EFC，$\therefore D'E\perp EB, D'E\perp EG$。以 E 为原点，以 $\dfrac{\overrightarrow{EG}}{2},\dfrac{\overrightarrow{EB}}{B},\dfrac{\overrightarrow{ED'}}{2\sqrt{2}}$ 为 x,y,z 的单位向量建立空间直角坐标系，其中各点坐标分别为

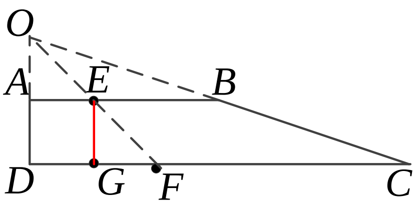
$O(-2,-2,0), D'(0,0,2\sqrt{2}), B(0,4,0), E(0,0,0)$，$\therefore \overrightarrow{OD'}=(2,2,2\sqrt{2}), \overrightarrow{OB}=(2,6,0)$,

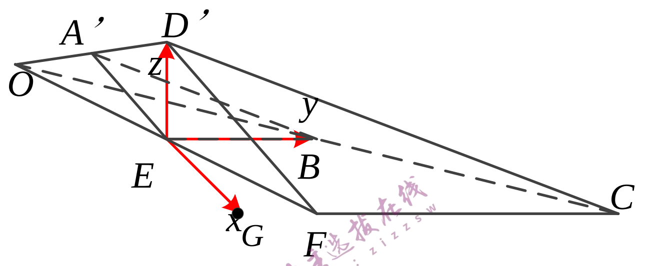
$\overrightarrow{OE}=(2,2,0), \overrightarrow{ED'}=(0,0,2\sqrt{2})$。取面 $OD'B$ 的法向量为 $\vec{n_1}=(a,b,c)$，

$\therefore \begin{cases} \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{OD'}=2a+2b+2\sqrt{2}c=0 \\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{OB}=2a+6b=0 \end{cases}$，不妨取 $\vec{n_1}=(-3,1,\sqrt{2})$，

取面 $OD'E$ 的法向量 $\vec{n_2}=(r,s,t)$，$\therefore \begin{cases} \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{OE}=2r+2s=0 \\ \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{ED'}=2\sqrt{2}t=0 \end{cases}$，不妨取 $\vec{n_2}=(1,-1,0)$，

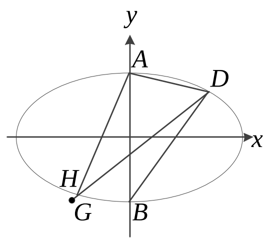
∴取二面角 $B-A'D'-E$ 的平面角为 α 为锐角，$\therefore \cos\alpha=\dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{4}{\sqrt{12}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。





21.（1）取 $D(x_o,y_o)$ 在椭圆上，$\therefore \dfrac{x_o^2}{4}+\dfrac{y_o^2}{b^2}=1$，$\therefore y_o^2=b^2-\dfrac{b^2x_o^2}{4}$，又 $\because k_1=\dfrac{y_o-b}{x_o}$，$k_2=\dfrac{y_o+b}{x_o}$，

$\therefore -\dfrac{1}{4}=k_1k_2=\dfrac{y_o-b}{x_o}\dfrac{y_o+b}{x_o}=\dfrac{y_o^2-b^2}{x_o^2}=\dfrac{-\dfrac{b^2x_o^2}{4}}{x_o^2}=-\dfrac{b^2}{4}$，$\therefore b=1$，∴椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$。



（2）取 l 的方程为 $y=kx+k-1=kx+m$，其中 $m=k-1$，将直线方程带入

$x^2+4y^2-4=0$ 得，$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，其判别式为

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=64k^2+16-16m^2=16(3k^2+2k)>0$，

$\therefore k>0$ 或 $k<-\dfrac{2}{3}$。取 $D(x_o,y_o)$，$H(x_1,y_1)$ 为交点，

$\therefore x_o+x_1=\dfrac{-8km}{4k^2+1}, x_ox_1=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$，

$\therefore k_1+k_3=\dfrac{y_o-1}{x_o}+\dfrac{y_1-1}{x_1}=\dfrac{ky_o+m-1}{x_o}+\dfrac{ky_1+m-1}{x_1}=2k+(m-1)\dfrac{x_o+x_1}{x_ox_1}$

$=2k+(m-1)\dfrac{-8km}{4m^2-4}=2k-\dfrac{2km}{m+1}=2k-2m=2$，$\therefore k_3=2-k_1$，又 $\because k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$，

$\therefore k_2+k_3=2-\dfrac{1}{4k_1}-k_1$，取 $f(x)=2-\dfrac{1}{4x}-x\ (x\neq 0)$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{4x^2}-1=\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{4x^2}$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-\dfrac{1}{2}],[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 单调递减，在 $[-\dfrac{1}{2},0),(0,\dfrac{1}{2}]$ 单调递增，

又∵ $f(-\frac{1}{2})=3$，$f(\frac{1}{2})=1$，∴ $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$，即 k_2+k_3 的取值范围为 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$。

22.（1）依题意 $f'(x)=2x+a, g'(x)=\frac{1}{x}$，设公切线在两条去线上的切点横坐标分别为 m,n，则有

$\begin{cases}2m+a=\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n}=\frac{m^2+am-\ln n}{m-n}\end{cases}$，∵ $m=\frac{1}{2n}-\frac{a}{2}$，∴ $\frac{1}{n}=\frac{(\frac{1}{2n}-\frac{a}{2})^2+a(\frac{1}{2n}-\frac{a}{2})-\ln n}{\frac{1}{2n}-\frac{a}{2}-n}$，

整理得 $\frac{1}{4n^2}-\frac{a}{2n}+\frac{a^2}{4}-1+\ln n=0$ ①，此关于 n 的方程只有一根。取 $t=\frac{1}{2n}>0$，∴ $n=\frac{1}{2t}$，则①可化为

$t^2-at+\frac{a^2}{4}-1+\ln\frac{1}{2t}=0$，取 $h(t)=t^2-at+\frac{a^2}{4}-1+\ln\frac{1}{2t}$，

∴ $h'(t)=2t-a-\frac{1}{t}=\frac{2t^2-at-1}{t}$，由 $2t^2-at-1$ 的特征可知，$h'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 必有零点 t_o，∴ $h(t)$ 在 $(0,t_o)$

单调递减，在 $(t_o,+\infty)$ 单调递增。∵ $h(t)$ 只有一个零点，

∴ $h(t_o)=t_o^{\ 2}-at_o+\frac{a^2}{4}-1+\ln\frac{1}{2t_o}=0$ ②，其中 t_o 满足 $2t_o^{\ 2}-at_o-1=0$ ③，联立②③消去参数 a 可得

$\frac{1}{4t_o^{\ 2}}-1+\ln\frac{1}{2t_o}=0$ ④，取 $p(t_o)=\frac{1}{4t_o^{\ 2}}-1+\ln\frac{1}{2t_o}$ 为关于 t_o 的递减函数，且 $p(\frac{1}{2})=0$，∴由④解得 $t_o=\frac{1}{2}$，

带入③得 $a=-1$。此时 $f(x)=x^2-x$。

取 $q(x)=f(x)-g(x)=x^2-x-\ln x$，∴ $q'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$，∴ $q(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递减，

$[1,+\infty)$ 单调递增，∴ $q(x)\ge q(1)=0$，即 $f(x)\ge g(x)$ 当且仅当 $x=1$ 取等。

（2）由（1）可知，$x(x-1)>\ln x, \forall x\neq 1$，即 $(x+1)x>\ln(x+1), \forall x\neq 0$，∴取 $x=\frac{1}{n}$，$n\in N_+$，则

$(\frac{1}{n}+1)\frac{1}{n}>\ln(\frac{1}{n}+1)$，$\forall n\in N_+$，即 $\frac{n+1}{n^2}>\ln(\frac{n+1}{n})$，$\forall n\in N_+$，

∴ $\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i^2}>\ln(\frac{2}{1})+\ln(\frac{3}{2})+\ldots+\ln(\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)$