

唐山市 2023 年普通高等学校招生统一考试第二次模拟演练

数 学

注意事项：

1、答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2、回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3、考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\mathbb{R}$ ，集合 $A=\{x|x<-2\}$, $B=\{x|-4<x<0\}$ ，则 $A \cup B=$

- A. $\{x|-4<x<-2\}$ B. $\{x|x<0\}$
C. $\{x|-2 \leq x < 0\}$ D. $\{x|x>-4\}$

2. $i(3-i)$ 的共轭复数为

- A. $3+i$ B. $3-i$
C. $1+3i$ D. $1-3i$

3. 某校高三年级一共有 1200 名同学参加数学测验，已知所有学生成绩的第 80 百分位数是 103 分，则数学成绩不小于 103 分的人数至少为

- A. 220 B. 240
C. 250 D. 300

4. 函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间为

- A. $\left(k\pi+\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{7\pi}{12}\right), k \in \mathbb{Z}$ B. $\left(k\pi+\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{5\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z}$
C. $\left(k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{5\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z}$ D. $\left(k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{7\pi}{12}\right), k \in \mathbb{Z}$

5. 已知圆 $C_1: x^2+y^2-2x=0$ ，圆 $C_2: (x-3)^2+(y-1)^2=4$ ，则 C_1 与 C_2 的位置关系是

- A. 外切 B. 内切
C. 相交 D. 外离

6. 从 2 艘驱逐舰和 6 艘护卫舰中选出 3 艘舰艇分别担任防空、反潜、巡逻任务，要求其中至少有一艘驱逐舰，则不同的安排方法种数为

- A. 336 B. 252
C. 216 D. 180

7. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，直线 l 过 F_2 与 E 交于 A, B 两点， $\triangle ABF_1$ 为直角三角形，且 $|AF_1|, |AB|, |BF_1|$ 成等差数列，则 E 的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

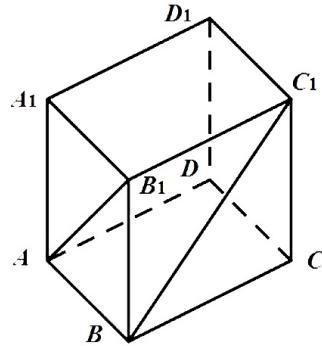
8. 已知函数 $f(x)=e^x+e^{-x}-ax^2$ 有三个极值点，则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 1)$
- B. $(-\infty, 1]$
- C. $[1, +\infty)$
- D. $(1, +\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

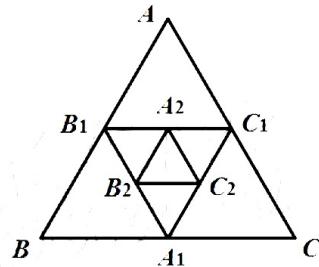
9. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长均为 2， $\angle BAD=60^\circ$ ，则

- A. AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$
- B. AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$
- C. AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$
- D. AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$



10. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，连接各边中点得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，再连接 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得到 $\triangle A_2B_2C_2$ ，…，如此继续下去，设 $\triangle A_nB_nC_n$ 的边长为 a_n ， $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 M_n ，则

- A. $M_n = \frac{\sqrt{3}}{4} a_n^2$
- B. $a_4^2 = a_3 a_5$
- C. $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2 - 2^{2-n}$
- D. $M_1 + M_2 + \dots + M_n < \frac{\sqrt{3}}{3}$



11. 已知向量 $\mathbf{a}=(\cos \alpha, \cos \beta)$, $\mathbf{b}=(\sin \alpha, \sin \beta)$, $\mathbf{c}=(1, 1)$ ，下列命题成立的是

- A. 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ，则 $\alpha=\beta+k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- B. 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=1$ ，则 $\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- C. 若 $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a}-\mathbf{b})$ ，则 $\alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- D. 设 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}=m$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}=n$ ，当 m^2+n^2 取得最大值时， $\alpha=\beta+2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} . $f(2x)=f(4-2x)$, $f(x)+f(-x)=0$ ，当 $x \in [2, 4]$ 时， $g'(x) < 0$, $g(1)=1$ ，则

- A. $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称
- B. $g(x)$ 为偶函数
- C. $g(x)+g(x+4)=0$
- D. 不等式 $g(e^x) \geq 1$ 的解集为 $(-\infty, 0] \cup [\ln(8k-1), \ln(8k+1)]$ ($k \in \mathbf{N}^*$)

三、填题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某种产品的广告费支出 x (单位: 万元) 与销售额 y (单位: 万元) 之间有如下对应数据:

x	1	3	4	5	7
y	15	20	30	40	45

根据上表数据得到 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=4.5x+a$, 则 a 的值为_____.

14. 已知直线 $l: \sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的一个焦点, 且与 C 的一条渐近线平行, 则 C 的实轴长为_____.

15. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F 分别为棱 AB, BC 的中点, 过 D_1, E, F 做该正方体的截面, 则截面形状为_____, 周长为_____.

16. $\forall x>0, ae^x-\ln x+\ln a\geqslant 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\sin A\sin B\cos C=\sin^2 C$.

(1) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的值;

(2) 若 $c=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值.

18. (12 分)

党的十八大以来, 习近平总书记多次对职业病防治工作作出重要指示, 并在全国卫生与健康大会上强调, 推进职业病危害源头治理。东部沿海某蚕桑种植场现共有工作人员 110 人, 其中有 22 人从事采桑工作, 另外 88 人没有从事采桑工作.

(1) 为了解职工患皮炎是否与采桑有关, 现采用分层随机抽样的办法从全体工作人员中抽取 25 人进行调查, 得到以下数据:

	采桑	不采桑	合计
患皮炎	4		
未患皮炎		18	
合计			25

①请完成上表;

②依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验, 分析患皮炎是否与采桑有关?

(2) 为了进一步了解职工职业病的情况, 需要在上表患皮炎的工作人员中抽取 4 人做进一步调查, 将其中采桑的人数记作 X , 求 X 的分布列和期望.

附: $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$,

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

19. (12 分)

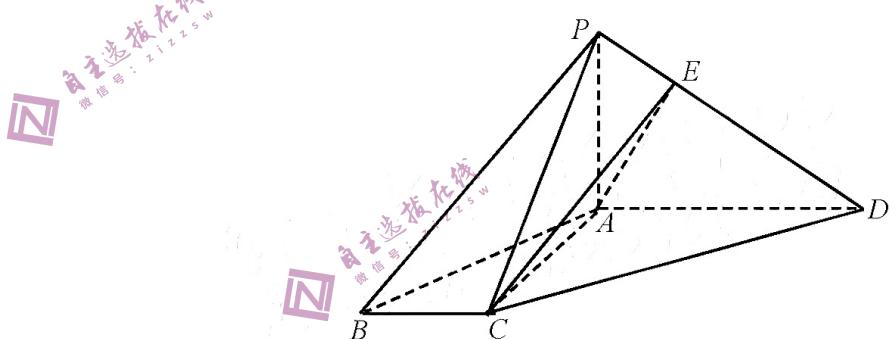
已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=b_1=1$ ， $a_2+a_3=b_6$ ， $a_3=b_4$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；
- (2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ；
- (3) 证明： $T_n=S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$.

20. (12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB=AD=2$ ， $BC=1$ ， $\angle BAD=120^\circ$ ， $PA \perp CD$ ， $PD \perp AC$ ，点 E 是棱 PD 上靠近点 P 的三等分点.

- (1) 证明： $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ；
- (2) 若平面 PAC 与平面 EAC 的夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



21. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点为 F ， A 为 C 上一点， B 为准线 l 上一点， $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$ ， $|AB|=9$.

- (1) 求 C 的方程；
- (2) $M, N, E(x_0, -2)$ 是 C 上的三点，若 $k_{EM}+k_{EN}=-\frac{4}{3}$ ，求点 E 到直线 MN 距离的最大值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=xe^{2-x}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的极值；
- (2) 若 $a>1$ ， $b>1$ ， $a \neq b$ ， $f(a)+f(b)=4$ ，证明： $a+b<4$.