

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某种产品的广告费支出 x (单位：万元) 与销售额 y (单位：万元) 之间有如下对应数据：

x	1	3	4	5	7
y	15	20	30	40	45

根据上表数据得到 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=4.5x+a$ ，则 a 的值为_____.

14. 已知直线 $l: \sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的一个焦点，且与 C 的一条渐近线平行，则 C 的实轴长为_____.

15. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F 分别为棱 AB, BC 的中点，过 D_1, E, F 做该正方体的截面，则截面形状为_____，周长为_____.

16. $\forall x>0, ae^x-\ln x+\ln a \geq 0$ ，则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\sin A \sin B \cos C = \sin^2 C$.

(1) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的值；

(2) 若 $c=2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值.

18. (12 分)

党的十八大以来，习近平总书记多次对职业病防治工作作出重要指示，并在全国卫生与健康大会上强调，推进职业病危害源头治理。东部沿海某蚕桑种植场现共有工作人员 110 人，其中有 22 人从事采桑工作，另外 88 人没有从事采桑工作。

(1) 为了解职工患皮炎是否与采桑有关，现采用分层随机抽样的办法从全体工作人员中抽取 25 人进行调查，得到以下数据：

	采桑	不采桑	合计
患皮炎	4		
未患皮炎		18	
合计			25

①请完成上表；

②依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，分析患皮炎是否与采桑有关？

(2) 为了进一步了解职工职业病的情况，需要在上表患皮炎的工作人员中抽取 4 人做进一步调查，将其中采桑的人数记作 X ，求 X 的分布列和期望.

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$,

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

19. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=b_1=1$, $a_2+a_3=b_6$, $a_3=b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

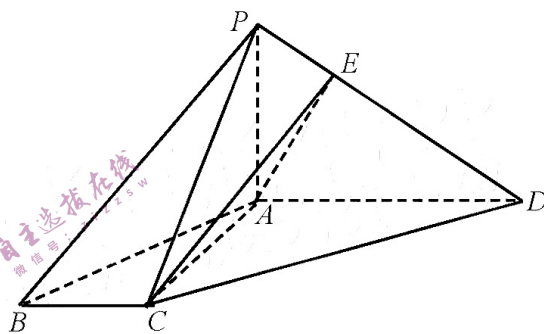
(3) 证明: $T_n = S_nb_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1})$.

20. (12分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB=AD=2$, $BC=1$, $\angle BAD=120^\circ$, $PA \perp CD$, $PD \perp AC$, 点 E 是棱 PD 上靠近点 P 的三等分点.

(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若平面 PAC 与平面 EAC 的夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



21. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点为 F , A 为 C 上一点, B 为准线 l 上一点,

$$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FA}, \quad |AB|=9.$$

(1) 求 C 的方程;

(2) $M, N, E(x_0, -2)$ 是 C 上的三点, 若 $k_{EM} + k_{EN} = -\frac{4}{3}$, 求点 E 到直线 MN 距离的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = xe^{2-x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若 $a>1, b>1, a \neq b, f(a)+f(b)=4$, 证明: $a+b < 4$.