

2021 年湖北省宜昌市初中学业水平考试

数学试题参考答案

一、选择题（每小题 3 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	D	C	D	A	B	C	B	A	B	D	C

二、填空题（每小题 3 分）

题号	12	13	14	15
答案	12	(1, -2)	白球	$2\pi - 2\sqrt{3}$

三、解答题

16. $\frac{2}{x^2-1} \div \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

解：原式 = $\frac{2}{(x-1)(x+1)} \cdot (x+1) - \frac{1}{x-1}$
 $= \frac{1}{x-1}$

当 $x=2$ 时，原式=1.

当 $x=3$ 时，原式 = $\frac{1}{2}$ （选择一种情况即可）

17. $\begin{cases} x-3(x-2) \geq 4 \text{ ①,} \\ \frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2} \text{ ②.} \end{cases}$

解：由不等式①得， $x \leq 1$
 由不等式②得， $x \leq 5$
 $\therefore$ 不等式组的解集为： $x \leq 1$.

18. (1) 垂直平分线，角平分线

(2) 解： $\because DF$ 是线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore DB=DA$,

$\therefore \angle BAD = \angle B = 40^\circ$

$\therefore \angle B = 40^\circ$, $\angle C = 50^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAC = 50^\circ$

$\therefore$ 射线 AE 是 $\angle DAC$ 的平分线，

$\therefore \angle DAE = 25^\circ$

19. (1) 400,

(2) 240, 图略,

(3) 36,

(4) C,

②方法一：设正方形边长为 a ，由 $\triangle B'KO \sim \triangle F'CO$ ，

$$\therefore \frac{B'K}{CF'} = \frac{OK}{CO} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B'K = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle B'KC \text{ 中, } B'K^2 + B'C^2 = CK^2,$$

$$\therefore a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 3^2,$$

$$\therefore a = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{由 } \frac{B'K}{CF'} = \frac{1}{2} \text{ 而知, } B'K = KE' = \frac{1}{2}a,$$

$$\text{由 } \triangle DKE' \sim \triangle DCF' \text{ 可得: } \frac{DE'}{DF'} = \frac{KE'}{CF'} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE' = E'F' = a,$$

$$\text{由 } \triangle DKE' \sim \triangle PDE' \text{ 可得: } DE'^2 = KE' \cdot PE',$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{2}a \cdot PE',$$

$$\therefore PE' = 2a,$$

$$\therefore PK = \frac{5}{2}a$$

$$\text{由 } \triangle PKD \cong \triangle GKC \text{ 可得: } PG = 2PK = 5a,$$

$$\therefore PG = 5a = 6\sqrt{5}.$$

方法二：如图 2，过点 P 作 $PM \perp GH$ 于点 M ，

$$\text{由 } \triangle CGB' \cong \triangle CDF' ,$$

$$\text{可得: } CG = CD,$$

$$\text{由方法一, 可知 } CD = 2CK,$$

$$\therefore CG = 6,$$

$$\text{由方法一, 可知 } K \text{ 为 } GP \text{ 中点, 从而 } PM = 2CK = 6, GM = 12$$

$$\text{从而由勾股定理得 } PG = 6\sqrt{5}.$$

(3) 方法一：如图 3，延长 $B'F'$ 与 BH 的延长线交于点 R ，

$$\text{由题意可知, } CF' \parallel GP, RB' \parallel BM$$

$$\therefore \triangle GBM \sim \triangle CRF', \angle G = \angle F'CR$$

$$\therefore \tan \angle G = \tan \angle F'CH = \frac{F'H}{CF'} = \frac{1}{2}$$

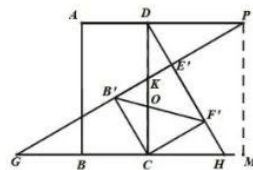
$$\text{设 } F'H = x, CF' = 2x, \text{ 则 } CH = \sqrt{5}x$$

$$\therefore CB' = CF' = E'F' = B'E' = BC = 2x$$

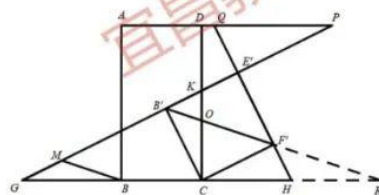
$$\therefore CB' \parallel HE',$$

$$\therefore \triangle RB'C \sim \triangle RF'H,$$

$$\therefore \frac{F'H}{B'C} = \frac{RH}{RC} = \frac{RF'}{RB'} = \frac{1}{2}$$



第 23 题图 2



第 23 题图 3

$$\begin{aligned} \therefore CH=RH, B'F'=RF' \\ \therefore CR=2CH=2\sqrt{5}x, S_{\triangle C'F'R'}=2S_{\triangle CF'H}=2x^2 \\ \because CB' \parallel HE', \\ \therefore \triangle GB'C \sim \triangle GE'H, \\ \therefore \frac{GC}{GH} = \frac{B'C}{E'H} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \\ \therefore \frac{GB+2x}{GB+2x+\sqrt{5}x} = \frac{B'C}{E'H} = \frac{2}{3} \\ \therefore GB=2(\sqrt{5}-1)x \\ \therefore \triangle GBM \sim \triangle CRF' \\ \therefore \frac{S_{\triangle GMB}}{S_{\triangle C'F'R'}} = \left(\frac{GB}{CR}\right)^2 = \left[\frac{2(\sqrt{5}-1)x}{2\sqrt{5}x}\right]^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{5} \\ \therefore S_{\triangle C'F'R'} = 2S_{\triangle CF'H} \\ \therefore \frac{S_{\triangle GMB}}{S_{\triangle C'F'R'}} = \frac{12-4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

方法二，如图4，过点B作BN⊥PG，垂足为点N.

由题意可知，CF'∥GP，HE'∥BN

$$\therefore \triangle GBN \sim \triangle CHF'$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GBN}}{S_{\triangle CHF'}} = \left(\frac{GB}{CH}\right)^2$$

$$\because CF' \parallel GP$$

$$\therefore \angle NGB = \angle F'CH$$

$$\therefore \tan \angle G = \tan \angle F'CH = \frac{CB'}{GB} = \frac{FH}{CF} = \frac{1}{2}$$

设FH=x，则CF=CB=B'E=E'F'=BC=2x，GB'=4x

$$\therefore CH=\sqrt{5}x, CG=2\sqrt{5}x, \text{ 则 } GB=2(\sqrt{5}-1)x$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GBN}}{S_{\triangle CHF'}} = \left(\frac{GB}{CH}\right)^2 = \left(\frac{2(\sqrt{5}-1)x}{\sqrt{5}x}\right)^2 = \frac{4(6-2\sqrt{5})}{5}$$

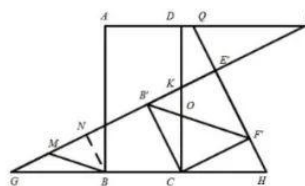
$$\because S_{\triangle C'F'H} = \frac{1}{2} CF' \cdot FH = x^2$$

$$\therefore S_{\triangle GBN} = \frac{4(6-2\sqrt{5})}{5} x^2$$

$$\because HE' \parallel BN$$

$$\therefore \triangle GBN \sim \triangle GCB'$$

$$\therefore \frac{GB}{GC} = \frac{BN}{CB} = \frac{2(\sqrt{5}-1)x}{2\sqrt{5}x} = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$$



第23题图4



$$\because CB \parallel BN, BM \parallel BF, CF \parallel GB$$

$$\therefore \triangle MBN \sim \triangle B'FC$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle B'FC}} = \left(\frac{BN}{CB'}\right)^2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore S_{\triangle MBN} = \frac{6-2\sqrt{5}}{5} S_{\triangle B'FC} = \frac{2(6-2\sqrt{5})}{5} x^2$$

$$\therefore S_{\triangle MBG} = S_{\triangle NBG} - S_{\triangle MBN} = \frac{4(6-2\sqrt{5})}{5} x^2 - \frac{2(6-2\sqrt{5})}{5} x^2 = \frac{2(6-2\sqrt{5})}{5} x^2$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GMB}}{S_{\triangle CFH}} = \frac{12-4\sqrt{5}}{5}$$

方法三：如图 5，设 AB 与 PQ 交于 N 点

设 FH = x，则 CF = CB' = B'E' = E'F' = BC = 2x，GB' = 4x

由题意可知，CF ∥ GP，BM ∥ B'F'，BN ∥ CO

$$\therefore \triangle MBN \sim \triangle F'OC$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle F'OC}} = \left(\frac{BN}{CO}\right)^2$$

由方法 (2) 可知，GB = 2(√5 - 1)x

所以 BN = (√5 - 1)x

$$\text{又} \because CO = \frac{2}{3} CK = \frac{2}{3} \sqrt{5} x$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle F'OC}} = \left(\frac{BN}{CO}\right)^2 = \frac{9(6-2\sqrt{5})}{20}$$

$$\therefore S_{\triangle MBN} = \frac{9(6-2\sqrt{5})}{20} \times \frac{4}{3} x^2 = \frac{3(6-2\sqrt{5})}{5} x^2$$

$$\therefore S_{\triangle GBN} = \frac{1}{2} \times BG \times BN = (\sqrt{5} - 1)^2 x^2 = (6 - 2\sqrt{5}) x^2$$

$$\therefore S_{\triangle GMB} = S_{\triangle GBN} - S_{\triangle NBM} = (6 - 2\sqrt{5}) x^2 - \frac{3(6-2\sqrt{5})}{5} x^2 = \frac{2(6-2\sqrt{5})}{5} x^2$$

$$\therefore S_{\triangle CFH} = \frac{1}{2} \times CF' \times F'H = x^2$$

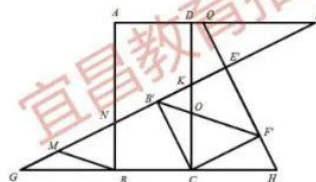
$$\therefore \frac{S_{\triangle GMB}}{S_{\triangle CFH}} = \frac{12-4\sqrt{5}}{5}$$

$$24. (1) \because y_1 = -(x+4)(x-n), \text{ 令 } y_1 = 0, -(x+4)(x-n) = 0$$

$$\therefore x_1 = -4, x_2 = n,$$

$$\therefore A(-4, 0)$$

数学试题参考答案与评分说明 第 6 页共 8 页



第 23 题图 5



$$(2) y_1 = -(x+4)(x-n) = -x^2 + (n-4)x + 4n,$$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}n^2 + 2n + 4,$$

$$\because y_2 = -(x+2n)^2 - n^2 + 2n + 9,$$

$$\therefore k_2 = -n^2 + 2n + 9.$$

$$(3) \because k_1 = \frac{1}{4}n^2 + 2n + 4, \quad k_2 = -n^2 + 2n + 9$$

$$\text{当 } k_1 = k_2 \text{ 时, } \frac{1}{4}n^2 + 2n + 4 = -n^2 + 2n + 9,$$

此时 $n = -2$ 或 $n = 2$,

$$y = k_1 - k_2 = \frac{5}{4}n^2 - 5.$$

方法一：由如图 1 图象可知：

当 $-4 \leq n < -2$ 时, $k_1 > k_2$,

当 $-2 < n < 2$ 时, $k_1 < k_2$,

当 $2 < n \leq 4$ 时, $k_1 > k_2$,

当 $n = -2$ 或 $n = 2$ 时, $k_1 = k_2$.

方法二：①当 $\frac{5}{4}n^2 - 5 > 0$ 时, 可得 $n > 2$ 或 $n < -2$,

即当 $-4 \leq n < -2$ 或 $2 < n \leq 4$ 时, $k_1 > k_2$

②当 $\frac{5}{4}n^2 - 5 < 0$ 时, 可得 $-2 < n < 2$,

即当 $-2 < n < 2$ 时, $k_1 < k_2$,

③当 $\frac{5}{4}n^2 - 5 = 0$ 时, 可得 $n = 2$ 或 $n = -2$,

即当 $n = 2$ 或 $n = -2$ 时, $k_1 = k_2$.

方法三：观察第 24 题图 2 可知.

当 $-4 \leq n < -2$ 时, $k_1 > k_2$,

当 $-2 < n < 2$ 时, $k_1 < k_2$,

当 $2 < n \leq 4$ 时, $k_1 > k_2$,

当 $n = -2$ 或 $n = 2$ 时, $k_1 = k_2$.

(4) 设直线 MN 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\text{则 } \begin{cases} (2n+9)k + b = -5n^2 & (1) \\ 2nk + b = 9 - 5n^2 & (2) \end{cases}$$

由(1)-(2)得, $k = -1$,

$$\therefore b = -5n^2 + 2n + 9,$$

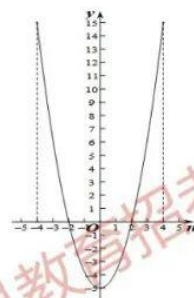
直线 MN 的解析式为: $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$.

第一种情况：如图 3,

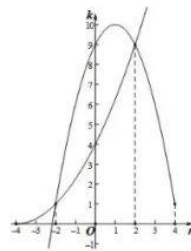
当直线 MN 经过抛物线 y_1, y_2 的交点时,

联立抛物线 $y_1 = -x^2 + (n-4)x + 4n$ 与 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 的解析式可得:

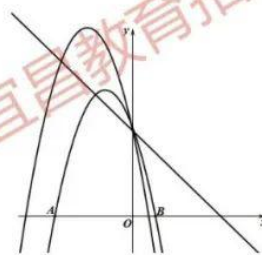
$$(5n-4)x = -5n^2 - 2n + 9 \quad ①$$



第 24 题图 1



第 24 题图 2



第 24 题图 3

联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 的解析式可得：

$$x^2 + (4n-1)x = 0,$$

$$\text{则 } x_1 = 0, x_2 = 1 - 4n \text{ ②}$$

当 $x_1 = 0$ 时，把 $x_1 = 0$ 代入 y_1 得： $y = 4n$ ，

把 $x_1 = 0, y = 4n$ 代入直线的解析式得：

$$4n = -5n^2 + 2n + 9,$$

$$\therefore 5n^2 + 2n - 9 = 0,$$

$$\therefore n = \frac{-1 \pm \sqrt{46}}{5}.$$

此时直线 MN 与抛物线 y_1, y_2 的公共点恰好为三个不同点。

当 $x_2 = 1 - 4n$ 时，把 $x_2 = 1 - 4n$ 代入①得：

$$(5n-4)(1-4n) = -5n^2 - 2n + 9,$$

该方程判别式 $\Delta < 0$ ，所以该方程没有实数根。

第二种情况：如图 4，

当直线 MN 与抛物线 y_1 或者与抛物线 y_2 只有一个公共点时。

当直线 MN 与抛物线 $y_1 = -x^2 + (n-4)x + 4n$ 只有一个公共点时，

联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 $y = -x^2 + (n-4)x + 4n$ 可得，

$$\therefore -x^2 + (n-3)x + 5n^2 + 2n - 9 = 0,$$

此时 $\Delta = 0$ ，即 $(n-3)^2 + 4(5n^2 + 2n - 9) = 0$ ，

$$\therefore 21n^2 + 2n - 27 = 0,$$

$$\therefore n = \frac{-1 \pm 2\sqrt{142}}{21}.$$

由第一种情况而知直线 MN 与抛物线 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 公共点的横坐标为

$$x_1 = 0, x_2 = 1 - 4n,$$

$$\text{当 } n = \frac{-1 \pm 2\sqrt{142}}{21} \text{ 时, } 1 - 4n \neq 0, \therefore x_1 \neq x_2$$

所以此时直线 MN 与抛物线 y_1, y_2 的公共点恰好为三个不同点。

如图 5，当直线 MN 与抛物线 $y_2 = -x^2 - 4nx - 5n^2 + 2n + 9$ 只有一个公共点，

$$\because x_1 = 0, x_2 = 1 - 4n, \therefore n = \frac{1}{4},$$

联立直线 $y = -x - 5n^2 + 2n + 9$ 与抛物线 $y_1 = -x^2 + (n-4)x + 4n$ ，

$$-x^2 + (n-3)x + 5n^2 + 2n - 9 = 0,$$

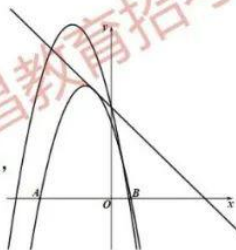
$$\Delta = (n-3)^2 + 4(5n^2 + 2n - 9) = 21n^2 + 2n - 27,$$

$$\text{当 } n = \frac{1}{4} \text{ 时, } \Delta < 0,$$

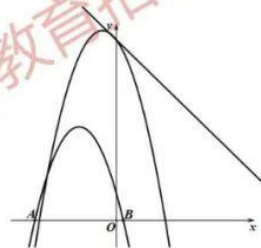
此时直线 MN 与抛物线 y_1, y_2 的公共点只有一个，

$$\therefore n \neq \frac{1}{4}.$$

$$\text{综上所述: } \therefore n_1 = \frac{-1 + \sqrt{46}}{5}, n_2 = \frac{-1 - \sqrt{46}}{5}, n_3 = \frac{-1 + 2\sqrt{142}}{21}, n_4 = \frac{-1 - 2\sqrt{142}}{21}$$



第 24 题图 4



第 24 题图 5

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线