参照秘密级管理★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2020级高三模拟考试

数学试题

2023.02

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

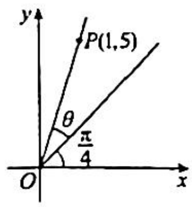
1. 已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-3\le 0\}$，则 $A\cup B=$　　，

A. $[-1,2)$　　B. $(2,3]$　　C. $(-1,3]$　　D. $(-\infty,3]$

2. 已知复数 $z=\dfrac{2+6\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，i为虚数单位，则 $|z|=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{6}$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 的大小如图所示，则 $\tan\theta=$



A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. 1　　D. $\dfrac{2}{3}$

4. 红灯笼，起源于中国的西汉时期，两千多年来，每逢春节人们便会挂起象征美好团圆意义的红灯笼，营造一种喜庆的氛围．如图1，某球形灯笼主体的轮廓由三部分组成，上下两部分是两个相同的圆柱的侧面，中间是球面除去上下两个相同球冠剩下的部分．如图2，球冠是由球面被平面截得的一部分，垂直于截面的直径被截得的部分叫做球冠的高，若球冠所在球面的半径为 R，球冠的高为 h，则球冠的面积 $S=2\pi Rh$．如图1，已知该灯笼的高为58 cm，圆柱的高为5 cm，圆柱的底面圆直径为14 cm，则围成该灯笼中间球面部分所需布料的面积为

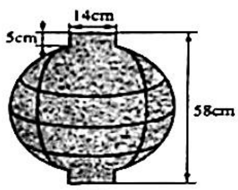


图1

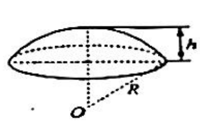


图2

A. $1940\pi\,\mathrm{cm}^2$　　B. $2350\pi\,\mathrm{cm}^2$　　C. $2400\pi\,\mathrm{cm}^2$　　D. $2540\pi\,\mathrm{cm}^2$

5. 已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2，P 是正六边形 $ABCDEF$ 边上任意一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为

A. 13　　B. 12　　C. 8　　D. $2\sqrt{3}$

6. 已知 $x>0$，$y>0$，设命题 p：$2^x+2^y\geq 4$，命题 q：$xy\geq 1$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1$，$a_na_{n+1}=2S_n$，设 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，若存在正整数 p，$q\ (p<q)$，使得 b_1，b_p，b_q 成等差数列，则

A. $p=1$　　B. $p=2$　　C. $p=3$　　D. $p=4$

8. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1，F_2，点 $A(-2,2)$ 为椭圆 C 内一点，点 $Q(a,\ b)$ 在双曲线 E：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 上，若椭圆上存在一点 P，使得 $|PA|+|PF_2|=8$，则 a 的取值范围是

A. $(\sqrt{5}+1,5]$　　B. $[3,5]$　　C. $(\sqrt{5}+1,2\sqrt{5}]$　　D. $[\sqrt{3},\sqrt{5}]$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 分别为随机事件 A，B 的对立事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列结论正确的是

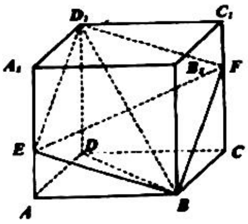
A. $P(A)+P(\overline{A})=1$

B. $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$

C. 若 A，B 互斥，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

D. 若 A，B 独立，则 $P(A|B)=P(A)$

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，过对角线 BD_1 作平面 α 交棱 AA_1 于点 E，交棱 CC_1 于点 F，则



A. 平面 α 分正方体所得两部分的体积相等

B. 四边形 BFD_1E 一定是菱形

C. 四边形 BFD_1E 的面积有最大值也有最小值

D. 平面 α 与平面 DBB_1 始终垂直

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为R，且 $f(x)-1$ 是奇函数，当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=\sqrt{4x-x^2}+1$；当 $x>2$ 时，$f(x)=2^{|x-4|}+1$．当 k 变化时，函数 $g(x)=f(x)-kx-1$ 的所有零点从小到大记为 x_1，x_2，…，x_n，则 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 的值可以为

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

12. 已知 $a>b$，$c>d$，$\dfrac{e^a}{a+1}=\dfrac{e^b}{b+1}=1.01$，$(1-c)e^c=(1-d)e^d=0.99$，则

A. $a+b>0$　　B. $c+d>0$

C. $a+d>0$　　D. $b+c>0$

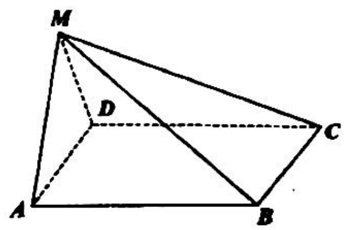
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $(1-x)^5$ 的展开式中，含 x^2 项的系数为________.

14. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小正周期为π，其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称，则 $f(\dfrac{\pi}{4})=$________.

15. 对任意正实数 a，记函数 $f(x)=|\lg x|$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 m_a，函数 $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 在 $[0,a]$ 上的最大值为 M_a，若 $M_a-m_a=\dfrac{1}{2}$，则 a 的所有可能值为________.

16. 设棱锥 $M-ABCD$ 的底面为正方形，且 $MA=MD$，$MA\perp AB$，如果 ΔAMD 的面积为1，则能够放入这个棱锥的最大球的半径为________.



四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）

在数列$\{a_n\}$中，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

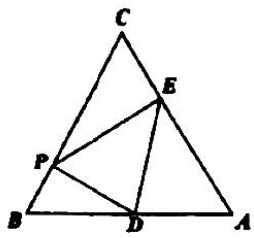
（2）证明：$\frac{1}{3a_1}+\frac{2}{4a_2}+\cdots+\frac{n}{(n+2)a_n}<\frac{1}{4}$.

18.（12分）

已知ΔABC中，a，b，c是角A，B，C所对的边，$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$，且$a=1$.

（1）求角B；

（2）若$AC=BC$，在ΔABC的边AB，AC上分别取D，E两点，使ΔADE沿线段DE折叠到平面BCE后，顶点A正好落在边BC（设为点P）上，求AD的最小值.

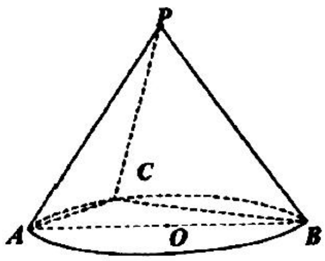


19.（12分）

如图，已知圆锥$P-ABC$，AB是底面圆O的直径，且长为4，C是圆O上异于A，B的一点，$PA=2\sqrt{3}$．设二面角$P-AC-B$与二面角$P-BC-A$的大小分别为α与β．

（1）求$\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\tan^2\beta}$的值；

（2）若$\tan\beta=\sqrt{3}\tan\alpha$，求二面角$A-PC-B$的余弦值．



20.（12分）

已知抛物线C：$x^2=2py\ (p>0)$的焦点为F，E为C上的动点，EQ垂直于动直线$y=t$（$t<0$），垂足为Q．当ΔEQF为等边三角形时，其面积为$4\sqrt{3}$．

（1）求C的方程；

（2）设O为原点，过点E的直线l与C相切，且与椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$交于$A$，$B$两点，直线$OQ$与$AB$交于点$M$．试问：是否存在$t$，使得$|AM|=|BM|$？若存在，求$t$的值；若不存在，请说明理由．

21.（12分）

第22届世界杯于2022年11月21日到12月18日在卡塔尔举办．在决赛中，阿根廷队通过点球战胜法国队获得冠军．

（1）扑点球的难度一般比较大，假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向来扑点球，而且门将即使方向判断正确也有$\frac{2}{3}$的可能性扑不到球．不考虑其它因素，在一次点球大战中，求门将在前三次扑到点球的个数X的分布列和期望；

（2）好成绩的取得离不开平时的努力训练，甲、乙、丙三名前锋队员在某次传接球的训练中，球从甲脚下开始，等可能地随机传向另外2人中的1人，接球者接到球后再等可能地随机传向另外2人中的1人，如此不停地传下去，假设传出的球都能接住．记第n次传球之前球在甲脚下的概率为p_n，易知$p_1=1,p_2=0$．

①证明：$\{p_n-\frac{1}{3}\}$为等比数列；

②设第n次传球之前球在乙脚下的概率为q_n，比较p_{10}与q_{10}的大小．

22.（12分）

已知函数$f(x)=e^{x-a}$，$g(x)=\ln x+a(a\in\mathbf{R})$．

（1）若直线$y=x$是$y=g(x)$的切线，函数$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\le 1\\ g(x), & x>1\end{cases}$，总存在$x_1<x_2$，使得$F(x_1)+F(x_2)=2$，求$x_1+F(x_2)$的取值范围；

（2）设$G(x)=f(x)-g(x)$，若$|G(x)|=b$恰有三个不等实根，证明：$a-\frac{1}{a}<b<2a-2$．