

# 高三数学考试

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | \log_2 x \leq 2\}$ ,  $B = \{x | (x+1)(x-3) < 0\}$ , 则  $A \cap B =$   
 A.  $\{x | 0 < x \leq 4\}$     B.  $\{x | 0 < x < 3\}$     C.  $\{x | 3 < x \leq 4\}$     D.  $\{x | -1 < x < 3\}$
2. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a + bi = (1 - 3i)i$ , 则  $a - b =$   
 A. -1    B. 4    C. 2    D. -2
3. 已知  $f(x) = (x-2)(x+a)$  是偶函数, 则  $a =$   
 A. 2    B. 1    C. -2    D. -1
4. 若双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的实轴长是虚轴长的 3 倍, 则  $C$  的离心率为  
 A.  $\sqrt{5}$     B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$     C.  $\sqrt{10}$     D.  $\frac{\sqrt{10}}{3}$
5. 有甲、乙两个物体同时从  $A$  地沿着一条固定路线运动, 甲物体的运动路程  $s_1$  (千米) 与时间  $t$  (时) 的关系为  $s_1(t) = 2^t - 1$ , 乙物体运动的路程  $s_2$  (千米) 与时间  $t$  (时) 的关系为  $s_2(t) = 3t$ , 当甲、乙再次相遇时, 所用的时间  $t$  (时) 属于区间  
 A. (2, 3)    B. (3, 4)    C. (4, 5)    D. (5, 6)
6.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $b \cos A = a(\sqrt{3} - \cos B)$ ,  $a = 2$ , 则  $c =$   
 A. 4    B. 6    C.  $2\sqrt{2}$     D.  $2\sqrt{3}$
7. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足对任意的实数  $x, y$ , 都有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 则  $f(\ln 2023) + f(\ln \frac{1}{2023}) =$   
 A. 2023    B. -2023    C. 0    D. 1
8. 欧拉是 18 世纪最优秀的数学家之一, 几乎每个数学领域都可以看到欧拉的名字, 例如初等几何中的欧拉线、多面体中的欧拉定理、微分方程中的欧拉方程, 以及数论中的欧拉函数等等. 欧拉函数是指: 对于一个正整数  $n$ , 小于或等于  $n$  的正整数中与  $n$  互质 (把公因数只有 1 的两个数叫互质数) 的正整数 (包括 1) 的个数, 记作  $\varphi(n)$ . 例如: 小于或等于 4 的正整数中与 4 互质的正整数有 1, 3 这两个, 即  $\varphi(4) = 2$ . 记  $S_n$  为数列  $\{\varphi(6^n)\}$  的前  $n$  项和, 则  $S_{12} =$   
 A.  $\frac{2}{5}(3^{12} + 2^{12})$     B.  $\frac{2}{5}(6^{12} - 1)$   
 C.  $\frac{1}{2}(3^{12} + 1)$     D.  $\frac{1}{2}(3^{12} - 1)$

【高三数学 第 1 页 (共 4 页)】

在线  
zizzs.com

在线  
zizzs.com

考号

姓名

班级

学校

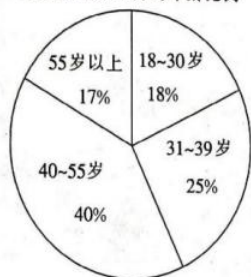
二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 已知直线  $l_1: y=kx+1$ ,  $l_2: y=mx+2$ , 圆  $C: (x-1)^2+(y-2)^2=6$ , 下列说法正确的是

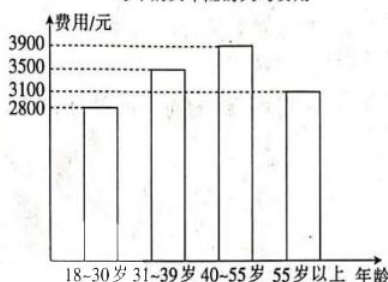
- A. 若  $l_1$  经过圆心  $C$ , 则  $k=1$
- B. 直线  $l_2$  与圆  $C$  相离
- C. 若  $l_1 \parallel l_2$ , 且它们之间的距离为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $k=\pm 2$
- D. 若  $k=-1$ ,  $l_1$  与圆  $C$  相交于  $M, N$ , 则  $|MN|=2$

10. 某统计机构对 1000 名拥有汽车的人进行了调查, 对得到的数据进行整理并制作了如图所示的统计图表, 下列关于样本的说法错误的是

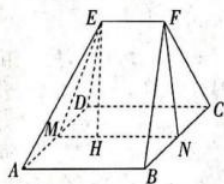
拥有汽车的人群的年龄比例



每年购买车险的人均费用



- A. 30 岁以上人群拥有汽车的人数为 720
  - B. 40~45 岁之间的人群拥有汽车的人数最多
  - C. 55 岁以上人群每年购买车险的总费用最少
  - D. 40~55 岁之间的人群每年购买车险的总费用, 比 18~30 岁和 55 岁以上人群购买车险的总费用之和还要多
11. 故宫太和殿是中国形制最高的宫殿, 其建筑采用了重檐庑殿顶的屋顶样式, 庑殿顶是“四出水”的五脊四坡式, 由一条正脊和四条垂脊组成, 因此又称五脊殿. 由于屋顶有四面斜坡, 故又称四阿顶. 如图, 某几何体  $ABCDEF$  有五个面, 其形状与四阿顶相类似. 已知底面  $ABCD$  为矩形,  $AB=2AD=2EF=12$ ,  $EF \parallel AB$ , 且  $EA=ED=FB=FC$ ,  $M, N$  分别为  $AD, BC$  的中点,  $EM$  与底面  $ABCD$  所成的角为  $\frac{\pi}{3}$ , 过点  $E$  作  $EH \perp MN$ , 垂足为  $H$ . 下列说法正确的有



- A.  $AD \perp$  平面  $EFNM$
  - B.  $EH=2\sqrt{3}$
  - C. 异面直线  $EM$  与  $BF$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$
  - D. 点  $H$  到平面  $ABFE$  的距离为  $3\sqrt{3}$
12. 已知点  $P(1, a)$  ( $a > 1$ ) 在抛物线  $C: y^2=2px$  ( $p > 0$ ) 上, 过  $P$  作圆  $(x-1)^2+y^2=1$  的两条切线, 分别交  $C$  于  $A, B$  两点, 且直线  $AB$  的斜率为  $-1$ , 若  $F$  为  $C$  的焦点,  $M(x, y)$  为  $C$  上的动点,  $N$  是  $C$  的准线与坐标轴的交点, 则
- A.  $p=1$
  - B.  $p=2$
  - C.  $\frac{|MN|}{|MF|}$  的最大值是  $\sqrt{2}$
  - D.  $\frac{|MN|}{|MF|}$  的最大值是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【高三数学 第 2 页(共 4 页)】

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知单位向量  $a, b$  满足  $a \cdot (a+4b) = -1$ , 则向量  $a$  与  $b$  的夹角为  $\underline{\quad\quad}$ .
14. 过点  $(0, 18)$  作曲线  $y = x^3 - x + 2$  的切线, 则切点的横坐标为  $\underline{\quad\quad}$ , 这条切线在  $x$  轴上的截距为  $\underline{\quad\quad}$ . (本题第一空3分, 第二空2分)
15. 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 已知  $AB=AC=4, AA_1=2, \angle BAC=90^\circ$ , 则该三棱柱外接球的表面积为  $\underline{\quad\quad}$ .
16. 现安排  $A, B, C, D, E$  这5名同学参加校园文化艺术节, 校园文化艺术节包含书法、唱歌、绘画、剪纸四个项目, 每个项目至少有一人参加, 每人只能参加一个项目,  $A$  不会剪纸但能胜任其他三个项目, 剩下的人都能胜任这四个项目, 则不同的安排方案有  $\underline{\quad\quad}$  种.

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

记等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_2=7, S_5=45$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 若  $T_m = \frac{2}{25}$ , 求  $m$  的值.

18. (12分)

已知函数  $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x - 1$ .

(1) 求  $f(x)$  的最小正周期和单调递增区间;

(2) 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时, 求  $f(x)$  的最大值, 并求当  $f(x)$  取得最大值时  $x$  的值.

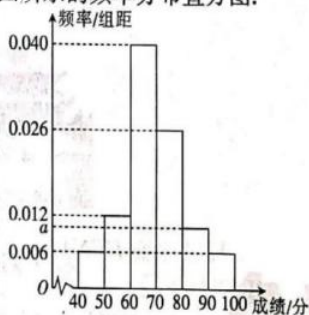
19. (12分)

为了让学生了解毒品的危害, 加强禁毒教育, 某校组织了全体学生参加禁毒知识竞赛, 现随机抽取50名学生的成绩(满分100分)进行分析, 把他们的成绩分成以下6组:  $[40, 50), [50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100]$ . 整理得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 求图中  $a$  的值并估计全校学生的平均成绩  $\mu$ . (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(2) 在(1)的条件下, 若此次知识竞赛得分  $X \sim N(\mu, 12^2)$ , 为了激发学生学习禁毒知识的兴趣, 对参赛学生制定如下奖励方案: 得分不超过57分的不予奖励, 得分超过57分但不超过81分的可获得学校食堂消费券5元, 得分超过81分但不超过93分的可获得学校食堂消费券10元, 超过93分可获得学校食堂消费券15元. 试估计全校1000名学生参加知识竞赛共可获得食堂消费券多少元. (结果四舍五入保留整数)

参考数据:  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827, P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545, P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ .

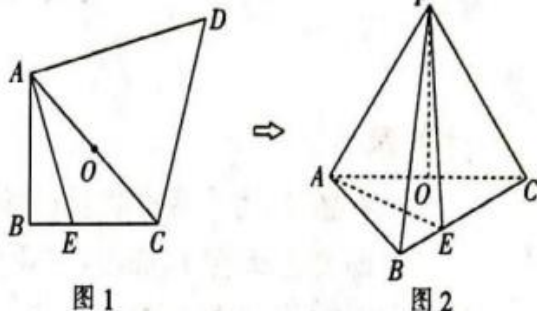


20. (12分)

在图1中,  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形,  $\angle B=90^\circ$ ,  $AB=2\sqrt{2}$ ,  $\triangle ACD$  为等边三角形,  $O$  为  $AC$  边的中点,  $E$  在  $BC$  边上, 且  $EC=2BE$ , 沿  $AC$  将  $\triangle ACD$  进行折叠, 使点  $D$  运动到点  $F$  的位置, 如图2, 连接  $FO, FB, FE$ , 使得  $FB=4$ .

(1) 证明:  $FO \perp$  平面  $ABC$ .

(2) 求二面角  $E-FA-C$  的余弦值.



21. (12分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  的直线  $l$  与  $E$  交于  $A, B$  两点,  $\triangle ABF_2$  的周长为 8, 且点  $(-1, \frac{3}{2})$  在  $E$  上.

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 设直线  $l$  与圆  $O: x^2 + y^2 = a^2$  交于  $C, D$  两点, 当  $|CD| \in [2\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{33}}{3}]$  时, 求  $\triangle ABF_2$  面积的取值范围.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 - ax, a \in \mathbf{R}$ .

(1) 若  $a=0$ , 求  $f(x)$  的最小值;

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 证明:  $f(x_1) + f(x_2) > -\frac{1}{4}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

