绵阳南山中学 2022 年秋绵阳二诊热身考试

理科数学（参考答案）

CABAA　DCDCC　CB；　88，　9，　100 $(\frac{4}{\pi}-1)$，　$\left(-\infty,2\right]$

12.依题意，对任意的实数 x，$y\in R$，等式 $f(x)f(y)=f(x+y)$ 成立，
令 $x=y=0$ 得：$f^2(0)=f(0)$，所以 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$，
又当 $x<0$ 时 $f(x)>1$，所以 $f(-1)=f(-1+0)=f(0)\times f(-1)>0$，所以 $f(0)\neq 0$，
即 $f(0)=1$.

又数列$\{a_n\}$满足 $f(a_{n+1})f(\frac{1}{1+a_n})=f(a_{n+1}+\frac{1}{1+a_n})=1=f(0)$，所以 $a_{n+1}=-\frac{1}{1+a_n}$，

又知道 $a_1=f(0)=1$，所以 $a_2=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$，$a_3=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=-2$，$a_4=-\frac{1}{1+(-2)}=1=a_1$，

由数列$\{a_n\}$的递推关系知数列$\{a_n\}$为以 3 为周期的数列，

所以 $a_{2016}=a_{2019}=a_3=-2$，$a_{2017}=a_{2020}=a_1=1$，$a_{2018}=a_2=-\frac{1}{2}$，

$f(a_{2017})=f(a_{2020})=f(1)$，$f(a_{2016})=f(a_{2019})=f(-2)=f(-1-1)=[f(-1)]^2$，

$f(-1)=f[(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})]=\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2$，

当 $x<0$ 时 $f(x)>1$，所以 $f(-1)>1$，$f(-\frac{1}{2})>1$，

所以 $f(a_{2017})=f(1)=\frac{1}{f(-1)}<1$，$f(a_{2016}))=f(a_{2019})=[f(-1)]^2>f(-1)$，

又 $f(-1)=\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2>f(-\frac{1}{2})=f(a_{2018})$，

所以 $f(a_{2016})=f(a_{2019})>f(a_{2018})>f(a_{2017})=f(a_{2020})$．
故选：B.

17.解：（1）

	关注	没关注	合计
男	30	30	60
女	12	28	40
合计	42	58	100

$$\therefore K^2=\frac{100(30\times 28-12\times 30)^2}{42\times 58\times 40\times 60}=\frac{800}{203}\approx 3.941>3.841$$

所以，有 95%的把握认为“对世界杯开幕式的关注与性别有关”.

（2）因为随机选一名高一女生关注此事的概率为 $p=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$

而 $X\sim B(3,\frac{3}{10})$，所以分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

$\therefore E(X)=3\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{10}$

18.（1）由$\begin{cases}S_{n+1}+S_n=2a_{n+1}{}^2\\S_n+S_{n-1}=2a_n{}^2(n\geq2)\end{cases}$两式相减，得：

$a_{n+1}+a_n=2(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)(n\geq2)$，

又$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(n\geq2)$，当$n=1$时，$S_2+S_1=2a_2{}^2$且$a_1=\dfrac{1}{2}$，

故$2a_2{}^2-a_2-1=0$，得$a_2=1$（$a_2=-\dfrac{1}{2}<0$舍去），

$\therefore a_2-a_1=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为$\frac{1}{2}$，所以$a_n=\dfrac{1}{2}n$.

（2）$b_n=n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}$，$\therefore T_n=1\cdot(\dfrac{1}{2})^2+2\cdot(\dfrac{1}{2})^3+3\cdot(\dfrac{1}{2})^4+\cdots+n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}$

$\therefore\dfrac{1}{2}T_n=1\cdot(\dfrac{1}{2})^3+2\cdot(\dfrac{1}{2})^4+3\cdot(\dfrac{1}{2})^5+\cdots+n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+2}$

$\therefore\dfrac{1}{2}T_n=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^3+\cdots+(\dfrac{1}{2})^{n+1}-n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+2}=\dfrac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+2}$

$=\dfrac{1}{2}-(\dfrac{1}{2})^{n+1}(1+\dfrac{n}{2})$　　　　$\therefore T_n=1-(n+2)\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}$

19.解析(1)$\because b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$，$\therefore b\sin\dfrac{\pi-A}{2}=a\sin B$，即$b\cos\dfrac{A}{2}=a\sin B$.

由正弦定理得$\sin B\cdot\cos\dfrac{A}{2}=\sin A\cdot\sin B$.$\because\sin B\neq0$，$\therefore\cos\dfrac{A}{2}=\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$.

$\because\cos\dfrac{A}{2}\neq0$，$\therefore\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，又$\because 0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，　$\therefore\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）设$\dfrac{c}{b}=x$，则由角平分线得$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}=x$，$\therefore\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{1+x}\overrightarrow{AB}+\dfrac{x}{1+x}\overrightarrow{AC}$

平方得$4=(\dfrac{1}{1+x})^2c^2+(\dfrac{x}{1+x})^2b^2+2\dfrac{x}{(1+x)^2}cb\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3x^2b^2}{(1+x)^2}$

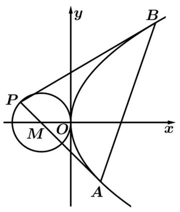
$\therefore b^2=\dfrac{4(1+x)^2}{3x^2}$　　　又$a^2=b^2+c^2-bc=b^2(1-x+x^2)$

$\therefore a^2=\dfrac{4(1+x)^2}{3x^2}(1-x-x^2)=\dfrac{4}{3}(x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x})\geq\dfrac{4}{3}(2+2)=\dfrac{16}{3}$

（当$x=1$时取“=”）

故a的最小值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

20.【详解】



（1）将点$\left(2,2\sqrt{2}\right)$的坐标代入抛物线C的方程为$2p\times2=8$，解得$p=2$，所以，抛物线C的方程为$y^2=4x$，该抛物线的准线方程为$x=-1$；

（2）先证明抛物线C在其上一点$Q\left(x_0,y_0\right)$处的切线方程为$2x-y_0y+2x_0=0$.

证明如下：由于点$Q\left(x_0,y_0\right)$在抛物线C上，则$y_0^2=4x_0$，

联立$\begin{cases}y^2=4x\\2x-y_0y+2x_0=0\end{cases}$，可得$\dfrac{y^2}{2}-y_0y+2x_0=0$，即$y^2-2y_0y+y_0^2=0$，

则$\Delta=4y_0^2-4y_0^2=0$，

所以，抛物线C在其上一点$Q\left(x_0,y_0\right)$处的切线方程为$2x-y_0y+2x_0=0$.

设点$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$、$P\left(x_3,y_3\right)$，

则直线PA的方程为$2x-y_1y+2x_1=0$，直线PB的方程为$2x-y_2y+2x_2=0$，

因为点P在直线PA、PB上，所以，$\begin{cases}2x_3-y_1y_3+2x_1=0\\2x_3-y_2y_3+2x_2=0\end{cases}$，

所以，点A、B的坐标满足方程$2x-y_3y+2x_3=0$，

由于两点确定一条直线，故直线AB的方程为$2x-y_3y+2x_3=0$，

联立$\begin{cases}y^2=4x\\2x-y_3y+2x_3=0\end{cases}$，消去$x$可得$y^2-2y_3y+4x_3=0$，

由韦达定理可得$y_1+y_2=2y_3$，$y_1y_2=4x_3$，所以，

$$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{y_3}{2}\right)^2}\cdot\left|y_1-y_2\right|=\frac{\sqrt{y_3^2+4}}{2}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(y_3^2+4\right)\left(y_3^2-4x_3\right)},$$

点P到直线AB的距离为$d=\dfrac{\left|4x_3-y_3^2\right|}{\sqrt{y_3^2+4}}$，

所以，$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(y_3^2+4\right)\left(y_3^2-4x_3\right)}\cdot\dfrac{\left|4x_3-y_3^2\right|}{\sqrt{y_3^2+4}}=\dfrac{1}{2}\left(y_3^2-4x_3\right)^{\frac{3}{2}}$，

另一方面，$y_3^2-4x_3=-x_3^2-2x_3-4x_3=-\left(x_3+3\right)^2+9$，其中$-2\le x_3\le0$，

所以，当$x_3=-2$时，$y_3^2-4x_3$取得最大值8，

因此，$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\left(y_3^2-4x_3\right)^{\frac{3}{2}}\le\dfrac{1}{2}\times8^{\frac{3}{2}}=8\sqrt{2}$.

21.证明：（1）$\because f'(x)=a\ln x-\dfrac{1}{x}$，$\therefore f'$（e）$=a-\dfrac{1}{e}$，

又f（e）$=0$，$\therefore g(x)=(a-\dfrac{1}{e})(x-e)$；

令$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f'$（e）$(x-e)$，

$\therefore F'(x)=f'(x)-f'$（e）$=a\ln x-\dfrac{1}{x}-a+\dfrac{1}{e}$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$F'$（e）$=0$，

$\therefore$当$0<x<e$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，

当$x>e$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，

e）$=0$ $F(x)\ge F(e)=0$恒成立，所以$f(x)\ge g(x)$恒成立.

（2）证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=(lnx-1)(x-1)$，则 $f'(x)=lnx-\frac{1}{x}$，

显然 $f'(x)$ 在定义域内单调递增，而 f'（1）$=-1<0$，f'（e）$=1-\frac{1}{e}>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,e)$，使 $f'(x_0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，令 $f(x)=0$，解得 $x=1$ 或 e，

由（1）（2）可知 $y=f(x)$ 在 $(e,0)$ 处的切线方程为 $g(x)=(1-\frac{1}{e})(x-e)$，

且 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，同理可得 $y=f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $h(x)=-x+1$，

令 $H(x)=f(x)-h(x)=(lnx-1)(x-1)-(-x+1)=(x-1)lnx$，

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$lnx>0$，当 $0<x<1$ 时，$x-1<0$，$lnx<0$，$\therefore H(x)\ge 0$ 恒成立.

设函数 $y=f(x)$ 在两个零点处的切线方程与直线 $y=m$ 的交点的横坐标分别为 x_1' 和 x_2'，

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1>x_1'$，$x_2<x_2'$，

令 $g(x)=h(x)=m$，解得 $x_2'=\frac{em}{e-1}+e$，$x_1'=1-m$，

$\therefore |x_1-x_2|<|x_1'-x_2'|=m\cdot\frac{2e-1}{e-1}+e-1$ 得证.

22.解：（1）$\because C_1$ 的方程为 $x^2+y^2-4x=0$，将 $x^2+y^2=\rho^2,x=\rho\cos\theta$ 代入，

$\therefore C_1$ 极坐标方程：$\rho=4\cos\theta$，设 $P(\rho',\theta)$，$Q(\rho,\theta)$，则 $\rho=\frac{1}{2}\rho'$，

Q 的轨迹方程：$\rho=2\cos\theta(\rho\ne 0)$；

（2）设 $M(\rho_1,\theta_1)$，$N(\rho_2,\theta_2)$，$\rho_1=4\cos\theta_1$，$\rho_2=2\cos\theta_2$，$\theta_1=\theta_2+\frac{\pi}{2}$，

$|OM|^2+4|ON|^2$

$=\rho_1^2+4\rho_2^2$

$=16\cos^2\theta_1+4\times4\cos^2\theta_2$

$=16\cos^2\left(\theta_2+\frac{\pi}{2}\right)+4\times4\cos^2\theta_2$

$=16\sin^2\theta_2+16\cos^2\theta_2$

$=16$

故 $|OM|^2+4|ON|^2$ 为定值且为 16.

23.解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=2|x-2|+|x+1|$，

原不等式可化为 $\begin{cases}x<-1\\4-2x-x-1<4\end{cases}$，或 $\begin{cases}-1\le x\le 2\\4-2x+x+1<4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2\\2x-4+x+1<4\end{cases}$，

解得 $x\in\varnothing$ 或 $1<x\le 2$ 或 $2<x<\frac{7}{3}$，$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left(1,\frac{7}{3}\right)$.

（2）若 $f(x)\le|x+5|$ 的解集包含 $[-1,2]$，

即当 $x\in[-1,2]$ 时，$2|x-a|+|x+1|\le|x+5|$ 恒成立，

由于在 $[-1,2]$ 上，$x+1\ge 0$，$x+5>0$，$\therefore |x+1|=x+1$，$|x+5|=x+5$，

$\therefore f(x)\le|x+5|$，等价于 $2|x-a|\le 4$，即 $|x-a|\le 2$，$-2\le x-a\le 2$，

$\therefore a-2\le x\le a+2$. $\therefore a-2\le -1$ 且 $a+2\ge 2$，

$\therefore 0\le a\le 1$，即 a 的取值范围为 $[0,1]$.