



保密★使用前

# 泉州市 2022 届高中毕业班质量监测 (一)

2021.08

## 高三数学

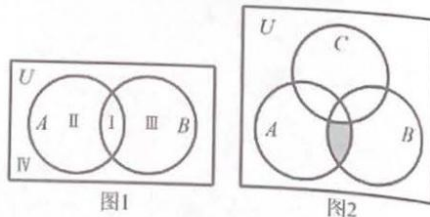
本试卷共 22 题, 满分 150 分, 共 6 页。考试用时 120 分钟。

### 注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 考生作答时, 将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域(黑色线框)内作答, 超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号; 非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性(签字)笔或碳素笔书写, 字体工整, 笔迹清楚。
4. 保持答题卡卡面整洁, 不折叠、不破损。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ , 则  $A \cup B =$   
A.  $\{2\}$  B.  $\{1, 2\}$  C.  $\{2, 3\}$  D.  $\{1, 2, 3\}$
2. 在复平面内, 复数  $z$  对应的点的坐标是  $(1, -1)$ , 则  $z^2 =$   
A.  $-2$  B.  $2$  C.  $-2i$  D.  $2i$
3. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 设甲:  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递增, 乙:  $f(x)$  满足  $f(1) < f(2)$ , 则甲是乙的  
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 用图形直观表示集合的运算关系, 最早是由瑞士数学家欧拉所创, 故将表示集合运算关系的图形称为“欧拉图”。后来, 英国逻辑学家约翰·韦恩在欧拉图的基础上创建了世人所熟知的“韦恩图”。韦恩用图 1 中的四块区域 I, II, III, IV 分别表示下列四个集合:  $A \cap B$ ,  $A \cap (\complement B)$ ,  $(\complement A) \cap B$ ,  $(\complement A) \cap (\complement B)$ , 则图 2 中的阴影部分表示的集合为  
A.  $A \cap B \cap C$  B.  $(\complement A) \cap B \cap C$  C.  $A \cap (\complement B) \cap C$  D.  $A \cap B \cap (\complement C)$





5. 若  $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , 且  $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan \theta =$

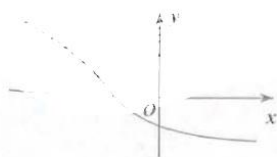
A.  $\frac{1}{2}$

B. 2

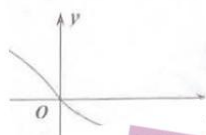
C.  $\frac{1}{4}$

D. 4

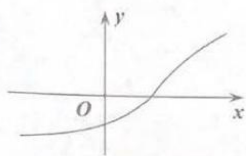
6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \leq 1 \\ \log_e x, & x > 1 \end{cases}$ , 则函数  $y = f(1-x)$  的图象大致为



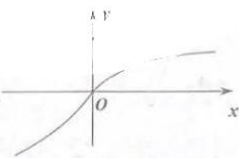
A



B



C



D

7. 已知两个正实数  $x, y$  满足  $x^2 - y = \ln y - \ln x$ , 则下列式子中一定不成立的是

A.  $x < y < 1$

B.  $y < x < 1$

C.  $1 < x < y$

D.  $x = y = 1$

8. 已知  $\triangle ABC$  与  $\triangle ACD$  所在的平面互相垂直,  $AC = 25$ ,  $AB = AD = 20$ ,  $CB = CD = 15$ , 则直线  $AD$  与  $BC$  所成的角的余弦值为

A.  $\frac{7}{24}$

B.  $\frac{7}{25}$

C.  $\frac{24}{25}$

D.  $\frac{12}{25}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知复数  $z = \sqrt{3} + i$  ( $i$  为虚数单位), 则

A.  $|z| = 2$

B.  $\bar{z} = \sqrt{3} - i$

C.  $z \cdot \bar{z} = 2$

D.  $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



10. 已知向量  $a = (1, \sqrt{3})$ ,  $b = (\lambda, 1)$ , 若  $(a - 4b) \cdot a = 4$ , 则

A.  $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

B.  $|b| = 2$

C.  $a \parallel b$

D.  $a \perp b$

11. 已知  $1 \leq a \leq 5$ ,  $a + b = 8$ , 则

A.  $-6 \leq a - b \leq 2$

B.  $7 \leq ab \leq 15$

C.  $32 \leq a^2 + b^2 \leq 50$

D.  $2^a + 8^b$  的最小值为 128

12. 已知点  $D\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ , 直线  $l: 2kx - 2y - k + 2 = 0$ , 圆  $C: x^2 + y^2 - 2x = 1$ , 过点  $P(0, -2)$  分别作圆  $C$

的两条切线  $PA$ ,  $PB$  ( $A$ ,  $B$  为切点), 点  $H$  在  $\triangle ABC$  的外接圆上, 则

A. 直线  $AB$  的方程是  $x + 2y - 1 = 0$

B.  $l$  被圆  $C$  截得的最短弦的长为  $\sqrt{3}$

C. 四边形  $PACB$  的面积为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D.  $|DH|$  的取值范围为  $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right]$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若棱长为 1 的正方体的所有顶点都在球  $O$  的球面上, 则球  $O$  的表面积为\_\_\_\_\_.

14. 过抛物线  $C: y^2 = 6x$  的焦点的直线  $l$  交  $C$  于  $A$ ,  $B$  两点, 若  $|AB| = 9$ , 则线段  $AB$  中点的横坐标为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $(x+m)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_5(x-1)^5$  ( $m \in \mathbb{R}$ ),

若  $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3 + a_5)^2 = 3^5$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ ,  $f(x+2)$  为偶函数,  $f(x^3+1)$  为奇函数, 且当  $x \in [0, 1]$  时,

$f(x) = ax + b$ . 若  $f(4) = 1$ , 则  $\sum_{k=1}^{100} \left[ k \cdot f\left(k + \frac{1}{2}\right) \right] =$ \_\_\_\_\_.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $a = 4\sqrt{2}$ ， $b = 5$ ， $c = 7$ 。

(1) 求  $\cos A$  的值；

(2) 若点  $D$  在边  $BC$  上，且  $BD = 3CD$ ，求  $AD$ 。

18. (12 分)

公差为 2 的等差数列  $\{a_n\}$  中， $a_1, a_2, a_4$  成等比数列。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

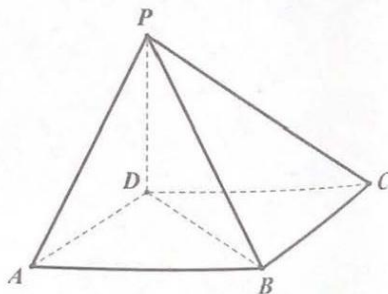
(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足： $b_n = \begin{cases} a_n, & n \leq 10, \\ b_{n-5}, & n > 10, \end{cases}$  求  $\{b_n\}$  的前 20 项和。

19. (12 分)

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PD \perp$  平面  $ABCD$ ，四边形  $ABCD$  是平行四边形， $\angle BAD = 45^\circ$ ，且  $AD = BD = PD = 1$ 。

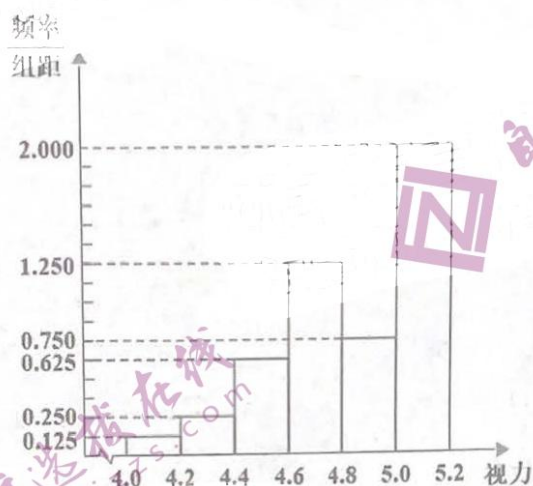
(1) 求证： $PA \perp PC$ ；

(2) 求二面角  $A-PB-C$  的余弦值。



20. (12分)

加强儿童青少年近视防控，促进儿童青少年视力健康是中央关心、群众关切、社会关注的“光明工程”。为了解青少年的视力与学习成绩间的关系，对某地区今年初中毕业生的视力和中考成绩进行调查，借助视力表测量视力情况，测量值5.0及以上为视力正常，5.0以下为近视。现从该地区今年初中毕业生随机抽取40名学生的视力测量值和中考成绩数据，得到视力测量值的频率分布直方图如下：



其中，近视的学生中成绩优秀与成绩一般的人数比例为1:2，成绩一般的学生中视力正常与近视的人数比例为3:4。

(1) 根据频率分布直方图的数据，将下面的 $2 \times 2$ 列联表补充完整，并判断是否有90%的把握认为视力情况与学习成绩有关：

| 学习成绩 \ 视力情况 | 视力正常 | 近视 | 合计 |
|-------------|------|----|----|
| 成绩优秀        |      |    |    |
| 成绩一般        |      |    |    |
| 合计          |      |    |    |

(2) 将频率视为概率，从该地区今年初中毕业生中随机抽取3人，设近视的学生数为 $X$ ，求 $X$ 的分布列与数学期望。

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$ 。

| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.100 | 0.050 | 0.010 |
|-------------------|-------|-------|-------|
| $k_0$             | 2.706 | 3.841 | 6.635 |



21. (12分)

设椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $A(0, -\sqrt{3})$ , 直线  $AF_2$  的倾斜角为  $60^\circ$ , 原点  $O$  到直线  $AF_2$  的距离是  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ .

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 过  $E$  上任一点  $P$  作直线  $PF_1, PF_2$  分别交  $E$  于  $M, N$  (异于  $P$  的两点), 且  $\overrightarrow{F_1M} = m\overrightarrow{PF_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2N} = n\overrightarrow{PF_2}$ , 探究  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{\ln x + 1}{ax}$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $(ex_1)^{x_2} = (ex_2)^{x_1}$  ( $e$  是自然对数的底数), 且  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 证明:  $x_1^2 + x_2^2 > 2$ .

保密★启用

泉州市 2022 届高中毕业班质量监测（一）

2021.08

数学参考答案及评分细则（选择题部分）

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。
4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，则  $A \cup B =$

A.  $\{2\}$       B.  $\{1, 2\}$       C.  $\{2, 3\}$       D.  $\{1, 2, 3\}$

【命题意图】本小题主要考查集合的含义、集合的运算等基础知识；主要考查运算求解能力；体现基础性，导向对发展数学运算核心素养的关注。

【试题简析】由已知可得  $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ ，故选 D。

2. 在复平面内，复数  $z$  对应的点的坐标是  $(1, -1)$ ，则  $z^2 =$

A.  $-2$       B.  $2$       C.  $-2i$       D.  $2i$

【命题意图】本小题主要考查复数的几何意义、复数的四则运算等基础知识；主要考查运算求解能力；渗透数形结合思想；体现基础性，导向对发展直观想象、数学运算等核心素养的关注。

【试题简析】因为复数  $z$  对应的点的坐标是  $(1, -1)$ ，所以  $z = 1 - i$ ， $z^2 = (1 - i)^2 = -2i$ ，故选 C。

3. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，设甲： $f(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递增，乙： $f(x)$  满足  $f(1) < f(2)$ ，则甲是乙的

A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件      C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

【命题意图】本小题主要考查充分必要条件、函数单调性定义等基础知识；考查逻辑推理和抽象概括等能力；考查转化与化归、函数与方程、特殊与一般等数学思想；体现基础性与综合性，导向对发展逻辑推理、直观想象、数学抽象等核心素养的关注。

【试题简析】函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递增, 则  $f(x)$  满足  $f(1) < f(2)$ , 所以甲是

乙的充分条件,  $f(x)$  仅满足  $f(1) < f(2)$ , 并不满足单调性定义中的“任意性”要求, 故

$f(x)$  在  $[0, 2]$  上不一定单调递增, 所以甲不是乙的必要条件. 综上所述, 甲是乙的充分

不必要条件. 故选 A.

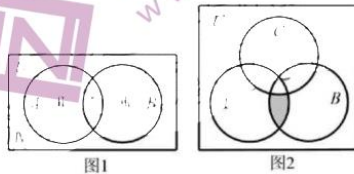
4. 用图形直观表示集合的运算关系, 最早是由瑞士数学家欧拉所创, 故将表示集合运算关系的图形称为

“欧拉图”. 后来, 英国逻辑学家约翰·韦恩在欧拉图的基础上创

建了世人所熟知的“韦恩图”. 韦恩用图 1 中的四块区域 I, II,

III, IV 分别表示下列四个集合:  $A \cap B$ ,  $A \cap (\complement_B B)$ ,  $(\complement_A A) \cap B$ ,

$(\complement_A A) \cap (\complement_B B)$ , 则图 2 中的阴影部分表示的集合为



- A.  $A \cap B \cap C$     B.  $(\complement_C C) \cap B \cap C$     C.  $A \cap (\complement_C C) \cap C$     D.  $A \cap B \cap (\complement_C C)$

【命题意图】本小题主要考查韦恩图、集合的运算等基础知识; 考查集合思想的应用, 考查逻辑推理、

运算求解能力, 检测图形语言与符号语言的转换能力; 考查化归与转化、数形结合等

数学思想, 体现基础性与应用性, 导向对发展直观想象、数学运算等核心素养的关注.

【试题简析】阴影部分的元素具有“既是 A 的元素、又是 B 的元素、但不是 C 的元素”的共同特征,

故应选 D.

5. 若  $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , 且  $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan \theta =$

- A.  $\frac{1}{2}$     B. 2    C.  $\frac{1}{4}$     D. 4

【命题意图】本小题主要考查二倍角公式、同角三角函数的基本关系和三角函数在各个象限的符号等

基础知识; 考查三角恒等变换, 考查逻辑推理、运算求解能力; 考查函数与方程、转

化与化归、数形结合等数学思想; 体现基础性与综合性, 导向对发展逻辑推理、数学运

算、直观想象等核心素养的关注.

【试题简析】由已知, 得  $\sin 2\theta = \frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{4}{5}$ , 即  $2\tan^2 \theta - 5\tan \theta + 2 = 0$ ,

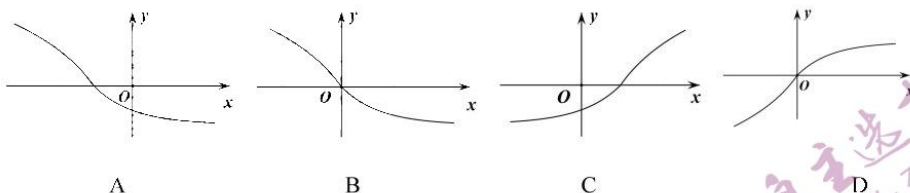
解得  $\tan \theta = 2$  或  $\tan \theta = \frac{1}{2}$ . 又  $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , 则  $\tan \theta > 1$ , 所以  $\tan \theta = 2$ , 故选 B.

另解: 由  $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , 知  $\tan \theta > 1$ , 故排除选项 A、C; 若  $\tan \theta = 4$ , 由

$\sin \theta = 4\cos \theta$ ,  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , 可解得  $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{8}{17}$ , 与已知条件矛盾, 可

排除 D. 故选 B.

6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \leq 1, \\ \log_2 x, & x > 1, \end{cases}$  则函数  $y = f(1-x)$  的图象大致为



【命题意图】本小题主要考查分段函数的含义与图象作法、指数函数的图象、图象的变换、函数图象的含义等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等能力；考查转化与化归、数形结合、函数与方程等思想；体现基础性与综合性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注。

【试题简析】令  $g(x) = f(1-x)$ .

解法1:  $g(0) = f(1-0) = f(1) = e^0 - 1 = 0$ , 又  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $y = f(1-x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 故选 B.

解法2: 因为  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \leq 1, \\ \log_2 x, & x > 1, \end{cases}$  所以  $g(x) = f(1-x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x \geq 0, \\ \log_2(1-x), & x < 0, \end{cases}$ , 通过作图象草图可选 B.

解法3: 先作  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \leq 1, \\ \log_2 x, & x > 1, \end{cases}$  的图象关于  $y$  轴对称的图象, 再把图象向右平移 1 个单位, 得到  $y = f(1-x)$  的图象, 故选 B.

解法4: 由  $g(0) = f(1-0) = f(1) = e^0 - 1 = 0$ , 可排除 A, C; 由  $g(1) = f(1-1) = f(0) = e^{-1} - 1 < 0$ , 可排除 D. 故应选 B.

7. 已知两个正实数  $x, y$  满足  $x^2 - y = \ln y - \ln x$ , 则下列式子中一定不成立的是

- A.  $x < y < 1$       B.  $y < x < 1$       C.  $1 < x < y$       D.  $x = y = 1$

【命题意图】本小题主要考查不等式的性质、运用函数单调性比较数的大小等基础知识；考查逻辑推理、运算求解、抽象概括等能力；考查函数与方程、转化与化归、分类与整合等数学思想；体现基础性、综合性及应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养的关注。

【试题简析】由  $x^2 - y = \ln y - \ln x$  得,  $x^2 + \ln x = y + \ln y$ , 可知  $f(x) = x + \ln x$  在  $x \in (0, +\infty)$  上单调递增.

当  $0 < x < 1$  时,  $y + \ln y = x^2 + \ln x < x + \ln x$ , 所以  $f(y) < f(x)$ , 即  $0 < y < x < 1$ ;

当  $x = 1$  时,  $y + \ln y = x^2 + \ln x = x + \ln x$ , 所以  $f(y) = f(x)$ , 即  $x = y = 1$ ;

当  $x > 1$  时,  $y + \ln y = x^2 + \ln x > x + \ln x$ , 所以  $f(y) > f(x)$ , 即  $1 < x < y$ . 故选 A.

另解:

当  $\ln y - \ln x > 0$  即  $y > x > 0$  时, 有  $x^2 - y > 0$ ,  $x^2 > y > x > 0$ ,  $x > 1$ , 故有  $y > x > 1$  的可能;

当  $\ln y - \ln x < 0$  即  $0 < y < x$  时, 有  $x^2 - y < 0$ ,  $x^2 < y < x$ ,  $x < 1$ , 故有  $y < x < 1$  的可能;

将  $x = y = 1$  代入  $x^2 - y = \ln y - \ln x$ , 易知等式成立. 综合以上, 应选 A.

8. 已知  $\triangle ABC$  与  $\triangle ACD$  所在的平面互相垂直,  $AC = 25$ ,  $AB = AD = 20$ ,  $CB = CD = 15$ , 则直线  $AD$  与  $BC$  所成的角的余弦值为

A.  $\frac{7}{24}$

B.  $\frac{7}{25}$

C.  $\frac{24}{25}$

D.  $\frac{12}{25}$

【命题意图】本题考查面面垂直的性质、线线角的求解、空间向量的坐标运算、空间向量的应用等基础知识; 考查空间想象能力、推理论证及运算求解能力; 考查数形结合思想、转化与化归思想等; 考查模型意识与应用意识; 体现基础性、综合性及应用性, 导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象及数学建模等核心素养的关注.

【试题简析】如右图所示, 在边  $AC$  上取点  $O$ , 使  $OB \perp AC$ , 则同时  $OD \perp AC$ ,

经计算, 易得  $OB = OD = 12$ ,  $AO = 16$ ,  $OC = 9$ , 建立如图空间直角坐标系,

则  $A(0, -16, 0)$ ,  $B(0, 0, 12)$ ,  $C(9, 0, 0)$ ,  $D(12, 0, 0)$ ,

$\vec{AD} = (12, 16, 0)$ ,  $\vec{BC} = (9, 0, -12)$ ,

$$\cos \langle \vec{AD}, \vec{BC} \rangle = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{16 \times 9}{20 \times 15} = \frac{12}{25},$$

故直线  $AD$  与  $BC$  所成的角的余弦值为  $\frac{12}{25}$ , 故选 D.

另解:

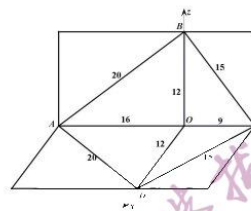
如右图所示, 在边  $AC$  上取点  $O$ , 使  $OB \perp AC$ , 则同时  $OD \perp AC$ , 经计算, 易得

$OB = OD = 12$ ,  $AO = 16$ ,  $OC = 9$ .

记向量  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ,  $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{OD} = \mathbf{d}$ , 则  $\vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ ,  $\vec{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$ ,

$$\vec{BC} \cdot \vec{AD} = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 9 \times 16, \quad \text{又 } \vec{BC} \cdot \vec{AD} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{AD}| \cos \langle \vec{BC}, \vec{AD} \rangle = 15 \times 20 \times \cos \langle \vec{BC}, \vec{AD} \rangle,$$

$\cos \langle \vec{AD}, \vec{BC} \rangle = \frac{12}{25}$ , 故直线  $AD$  与  $BC$  所成的角的余弦值为  $\frac{12}{25}$ , 故选 D.



二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分。

9. 已知复数  $z = \sqrt{3} + i$  ( $i$  为虚数单位)，则

- A.  $|z| = 2$       B.  $\bar{z} = \sqrt{3} - i$       C.  $z \cdot \bar{z} = 2$       D.  $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

【命题意图】本题考查复数的模、共轭复数、复数的四则运算等基础知识；考查运算求解能力；考查化归与转化思想；体现基础性，导向对发展数学运算等核心素养的关注。

【试题简析】 $|z| = \sqrt{3+1} = 2$  故 A 正确；由共轭复数的概念，B 正确； $z \cdot \bar{z} = (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i) = 3 - i^2 = 4$ ，

故 C 错误； $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，故 D 正确。

10. 已知向量  $a = (1, \sqrt{3})$ ， $b = (\lambda, 1)$ ，若  $(a - 4b) \cdot a = 4$ ，则

- A.  $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $|b| = 2$       C.  $a \parallel b$       D.  $a \perp b$

【命题意图】本题考查向量的坐标表示、向量的运算、向量的数量积、向量的模、向量的位置关系等基础知识；考查运算求解能力；考查数形结合思想；体现基础性与综合性，导向对发展数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注。

【试题简析】由  $(a - 4b) \cdot a = 4$  得： $a^2 - 4a \cdot b = 4 - 4a \cdot b = 4$ ，所以  $a \cdot b = 0$ ，即  $a \perp b$ ，故 C 不正确，D 正确；由  $a \cdot b = \lambda + \sqrt{3} = 0$  得： $\lambda = -\sqrt{3}$ ，故 A 不正确；因为  $b = (-\sqrt{3}, 1)$ ，所以  $|b| = 2$ ，故 B 正确；故选 BD。

另解：若 A 正确，则 B, C, D 均错，由于是多选题，故 A 一定不正确；若 B 正确，则  $\lambda = \pm\sqrt{3}$ ，则 C 错误，而 D 可能正确，也可能错误；若 C 正确，则 D 错误，又  $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，知 B 也错误，则 C 一定错误。由前述分析，应选答案为 BD。【注：用此解法，可将此题视为推理题。】

11. 已知  $1 \leq a \leq 5$ ， $a + b = 8$ ，则

- A.  $-6 \leq a - b \leq 2$       B.  $7 \leq ab \leq 15$       C.  $32 < a^2 + b^2 \leq 50$       D.  $2^a + 8^b$  的最小值为 128

【命题意图】本题考查不等式的运算、基本不等式及二次函数等基础知识；考查运算求解、推理论证能力；考查函数与方程思想、特殊与一般思想；体现基础性、综合性与应用性，导向对发展数学运算、数学抽象、逻辑推理等核心素养的关注。

【试题解析】对于 A，由已知得： $a - b = 2a - (a + b) = 2a - 8$ ，所以  $-6 \leq a - b \leq 2$ ，A 正确；

对于 B，当  $a = b = 4$  时， $ab = 16$ ，不等式不成立，故 B 错误；

对于 C， $a^2 + b^2 = a^2 + (8 - a)^2 = 2a^2 - 16a + 64 = 2(a - 4)^2 + 32$

由  $1 \leq a \leq 5$  得  $0 \leq (a-4)^2 \leq 9$ , 故  $32 \leq 2(a-4)^2 + 32 \leq 50$ , C 正确;

对于 D,  $2^a + 8^b + 2^a + 2^{2b} \geq 2\sqrt{2^{a+2b}}$ , 这里取等号的情况是当且仅当  $a=3b$ , 即  $\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$ ,

与  $1 \leq a \leq 5$  矛盾, 故 D 错误.

综上, 应选 AC.

12. 已知点  $D\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ , 直线  $l: 2kx - 2y - k + 2 = 0$ , 圆  $C: x^2 + y^2 - 2x = 1$ , 过点  $P(0, -2)$  分别作圆  $C$  的两条切线  $PA, PB$  ( $A, B$  为切点),  $H$  在  $\triangle ABC$  外接圆上, 则

A. 直线  $AB$  的方程是  $x + 2y - 1 = 0$

B.  $l$  被圆  $C$  截得的最短弦的长为  $\sqrt{3}$

C. 四边形  $PACB$  的面积为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D.  $DH$  的取值范围为  $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right]$

【命题意图】本题考查直线和圆的基础知识、直线与圆的位置关系、过定点直线系等基础知识; 考查运算求解与推理论证能力; 考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想; 体现综合性、应用性与创新性, 体现选拔性要求, 导向对发展直观想象、数学运算、逻辑推理、数学建模等核心素养的关注.

【试题简析】对于选项 A, 可有下列做法:

解法 1: 由已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2x = 1$ , 得圆心  $C(1, 0)$ , 半径  $r = \sqrt{2}$ . 因为  $CA \perp PA$ ,  $CB \perp PB$ ,

由  $|PC| = \sqrt{5}$ ,  $|PA| = \sqrt{3}$ , 由等积法(或射影定理), 得  $C(1, 0)$  到直线  $AB$  的距离为  $|CQ| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

又直线  $PC$  的方程是  $x + \frac{y}{-2} = 1$ , 即  $2x - y - 2 = 0$ , 所以直线  $AB$  的方程可设为

$x + 2y + m = 0$ , 结合点  $C(1, 0)$  到直线  $AB$  的距离为  $|CQ| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 得  $\frac{|m+1|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 解得  $m = 1$

或  $m = -3$ , 结合图形可知直线  $AB$  的方程是  $x + 2y + 1 = 0$ , 选项 A 错误.

解法 2: 设切点为  $A'(x_0, y_0)$ , 以  $A'$  为切点的圆的切线方程可写成  $x_0x + y_0y - (x + x_0) = 1$ , 由于切线

过点  $P(0, -2)$ , 所以  $x_0 + 2y_0 + 1 = 0$ , 若设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $\begin{cases} x_1 + 2y_1 + 1 = 0 \\ x_2 + 2y_2 + 1 = 0 \end{cases}$ , 所以直

线  $AB$  的方程是  $x + 2y + 1 = 0$ , 选项 A 错误.

解法 3: 因为  $P, A, C, B$  四点共圆, 圆心为  $PC$  的中点  $T\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ , 半径为  $R = \frac{|PC|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 圆  $T$  的方程

是  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4}$ , 又圆  $C: x^2 + y^2 - 2x = 1$ , 则两式相减得到直线  $AB$  的方程是

$x+2y+1=0$ ，选项A错误.

**解法4:** 通过作图，可判断  $A, B$  分别落在第三、第四象限，故直线  $AB$  的纵截距必为负数，所以直线  $AB$  的方程不可能是  $x+2y-1=0$ ，选项A错误.

对于选项B: 直线  $l: 2kx-2y-k+2=0$  可化为  $(2x-1)k=2y-2$ ，知直线恒过定点  $R(\frac{1}{2}, 1)$ ，可判断  $R(\frac{1}{2}, 1)$

在圆内，故当且仅当  $CR \perp MN$  时，弦长  $|MN|$  最短，又  $|CR| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，所以  $|MN|$  的最小

值是  $|MN| = 2\sqrt{r^2 - |CR|^2} = 2\sqrt{2 - \frac{5}{4}} = \sqrt{3}$ ，选项B正确.

对于选项C: 四边形  $PACB$  的对角线  $AB, PC$  互相垂直，所以四边形  $PACB$  的面积等于  $\frac{1}{2}|AB||PC|$

$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{r^2 - |CQ|^2} |PC| = \sqrt{2 - \frac{4}{5}} \times \sqrt{5} = \sqrt{6}$ ，选项C错误.

另解: 由已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2x = 1$ ，得圆心  $C(1, 0)$ ，半径  $r = \sqrt{2}$ ，因为  $CA \perp PA, CB \perp PB$ ，

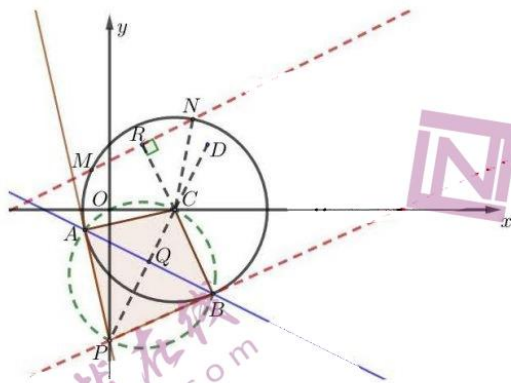
由  $|PC| = \sqrt{5}, |PA| = \sqrt{3}$ ，所以四边形  $PACB$  的面积等于  $2S_{\triangle PAC} = 2 \times \frac{1}{2} |PA||AC| = \sqrt{6}$ ，故选项C错误.

对于选项D: 根据题意，知  $\triangle ABC$  的外接圆恰好为经过  $P, A, C, B$  四点的圆. 因为  $PC$  的中点  $T(\frac{1}{2}, -1)$  为

外接圆的圆心，所以圆上点  $H$  到点  $D$  的距离最小值是  $|DT| - r = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，最大值是

$|DT| + r = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，所以  $DH$  的取值范围为  $[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{2}]$ ，选项D正确.

综上，知应选BD.



## 关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线