2023年高三年级三月调研考试数学试题

参考答案与评分标准

一、选择题与多选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	C	A	B	B	D	ABD	BCD	BCD	ABD

三、填空题

13. $-\frac{1}{2}$ 14. $2\sqrt{2}e$ 15. $2\sqrt{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 16.1(2分) 91（3分）

四、解答题

17.解：(1)依题意有$2\sin B\sin(A+\frac{\pi}{6})=\sin A+\sin C=\sin A+\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

$\therefore\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin B\cos A=\sin A+\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

则$\sqrt{3}\sin B-\cos B=2\sin(B-\frac{\pi}{6})=1$, 又$B\in(0,\pi)$,$\therefore B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,$B=\frac{\pi}{3}$. …………3分

$\because\angle ADC=\frac{3\pi}{4}$，则$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$，在$\triangle ABD$中，

由正弦定理得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，$\therefore\frac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得$AD=\sqrt{6}$. ……5分

（2）设$CD=t$，则$BD=2t$，又$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，

即$\frac{1}{2}\times2\times3t\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，可得$t=2$，故$BC=3t=6$，

又$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B}=\sqrt{4+36-2\times2\times6\times\frac{1}{2}}=2\sqrt{7}$，

在$\triangle ABD$中，由正弦定理可得$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，故$\sin\angle BAD=2\sin\angle ADB$，

在$\triangle ACD$中，由正弦定理可得$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，故$\sin\angle CAD=\frac{\sqrt{7}}{7}\sin\angle ADC$，

因为$\sin\angle ADB=\sin(\pi-\angle ADC)=\sin\angle ADC$，

$\therefore \dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{2\sin\angle ADB}{\dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin\angle ADC}=2\sqrt{7}$. ……10 分

18.【详解】(1) 由题设 $2S_n=a_n+a_n^2$ 且，$a_n>0$

当 $n=1$ 时，$2S_1=2a_1=a_1+a_1^2$，可得 $a_1=1$；

当 $n\geq 2$ 时，$2(S_n-S_{n-1})=2a_n=a_n+a_n^2-a_{n-1}-a_{n-1}^2$，则 $a_n+a_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$；

由 $a_n+a_{n-1}>0$，故 $a_n-a_{n-1}=1$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项、公差均为 1 的等差数列，故 $a_n=n$. ……5 分

(2) $\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{2}{a_n}\leq m\Rightarrow\dfrac{n}{2}+\dfrac{2}{n}\leq m\Rightarrow\dfrac{1}{2}\left(n+\dfrac{4}{n}\right)\leq m$，

因为 $\dfrac{1}{2}\left(n+\dfrac{4}{n}\right)\geqslant 2$，当且仅当 $n=2$ 时成立，所以 $b_1=0$，$b_2=1$，

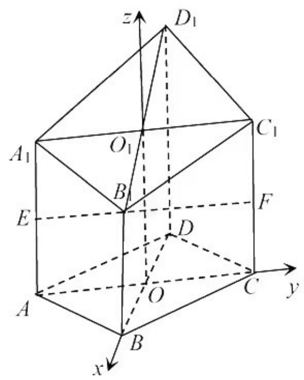
当 $m\geq 3$，因为 $\dfrac{2m-1}{2}+\dfrac{2}{2m-1}=m-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2m-1}\leq m$，$\dfrac{2m}{2}+\dfrac{2}{2m}=m+\dfrac{1}{m}>m$，

所以能使 $\dfrac{n}{2}+\dfrac{2}{n}\leq m$ 成立的 n 的最大值为 $2m-1$，

所以 $b_m=2m-1(m\geq 3)$，

所以 $\{b_m\}$ 的前 50 项和为 $0+1+5+7+\cdots+99=0+1+\dfrac{(5+99)\times 48}{2}=2497$.. ……12 分

19. (1) 证明：连结 AC，$\because AA_1=CC_1, AA_1/\!/CC_1, \overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CC_1}$



$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CF}$ 即 $AE=CF$，$AE/\!/CF$.

$\therefore$ 四边形 $AEFC$ 为平行四边形，则 $AC/\!/EF$.

$\because EF\subset$ 平面 BEF, $AC\not\subset$ 平面 BEF

$\therefore AC/\!/$ 平面 BEF $\because$ 平面 $BEF\cap$ 平面 $ABCD=l$, $\therefore l\subset$ 平面 ABC.

$\therefore AC\parallel l$. $\because$ 菱形 $ABCD$，则 $AC\perp BD$，

又 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$, $AC\subset$ 平面 $ABCD$，则 $AC\perp BB_1, BD\cap BB_1=B$

$\therefore AC\perp$ 平面 B_1BDD_1，又 $AC/\!/l$

$\therefore l\perp$ 平面 B_1BDD_1 …………4 分

（2）连结A_1C_1交B_1D_1于O_1点，$AC\cap BD=O$,则$OO_1//BB_1$.

$\because BB_1\perp$平面$ABCD$

$\therefore OO_1\perp$平面$ABCD$,则$OO_1\perp OB,OO_1\perp OC$.

$\because$菱形$ABCD$，则$OB\perp OC\because AC=EF=2,\therefore OA=OC=1,AB=BD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$以OB,OC,OO_1为x轴，y轴，z轴建立如图的空间直角坐标系，

设$BB_1=t$,则$DD_1=2t$.

$\because V_{B_1-BDF}=V_{F-BDB_1}=\dfrac{1}{3}\times1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times t=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

$\therefore t=2$,即$BB_1=2,DD_1=4$

$\therefore OO_1=3$,则$D_1(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,4),\overline{CF}=(0,0,3\lambda),F(0,1,3\lambda)$

$\therefore\overline{D_1F}=(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,3\lambda-4)$又$\overline{OC}=(0,1,0)$是平面$BDD_1$的一个法向量

$$\therefore\sin\theta=\frac{\left|\overline{D_1F}\bullet\overline{OC}\right|}{\left|\overline{D_1F}\right|\bullet\left|\overline{OC}\right|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}+(3\lambda-4)^2}}$$

$\because$设$f(\lambda)=(3\lambda-4)^2+\dfrac{4}{3},(0<\lambda\le1)$,则$f(\lambda)\in\left[\dfrac{7}{3},\dfrac{52}{3}\right)$

$$\therefore\frac{\sqrt{156}}{52}<\sin\theta\le\frac{\sqrt{21}}{7}$$

………………12 分

20.解：（1）设甲乙通过两轮制的初赛分别为事件A_1,A_2，则

$P(A_1)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}$，$P(A_2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{5}$

由题意可得，X的取值有 0,1,2,

$P(X=0)=\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{6}{25}$，　$P(X=1)=\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{13}{25}$

$P(X=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$.

所以$E(X)=0\times\dfrac{6}{25}+1\times\dfrac{13}{25}+2\times\dfrac{6}{25}=1$　　　…………6 分

（2）依题意甲，乙抢到并答对一题的概率为$P(B_1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}$，$P(B_2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{15}$，

乙已得 10 分，甲若想获胜情况有：

①甲得 20 分：其概率为$\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{25}$;

②甲得 10 分，乙再得－10 分，其概率为$C_2^1(\frac{1}{5})\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{25}$；

③甲得 0 分，乙再得－20 分，其概率为$(\frac{2}{3}\times\frac{3}{5})^2=\frac{4}{25}$.

故乙先得 10 分后甲获胜的概率为$\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{4}{25}=\frac{9}{25}$.　　…………12 分

21.解：（1）函数$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$g'(x)=\frac{-ax^2+x-1}{x^2}$，$(x>0)$，

当 $a=0$ 时，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增；

当 $a>0$ 时，$\Delta=1-4a$，

(i)当$\Delta=1-4a\le 0$，即$a\ge\frac{1}{4}$时，$g'(x)\le 0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

(ii)当$\Delta=1-4a>0$，即$0<a<\frac{1}{4}$时，令$g'(x)=0$，得

$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}, x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}, 0<x_1<x_2$

x	$(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a})$	$(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a})$	$(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a},+\infty)$
$g'(x)$	－	＋	－
$g(x)$	减函数	增函数	减函数

综上：当 $a=0$ 时，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增；

当$a\ge\frac{1}{4}$时，，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

当$0<a<\frac{1}{4}$时，$g(x)$在$(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a})$，$(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a},+\infty)$上单调递减；

在$(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a})$上单调递增.　　…………………5 分

(2)由题意知 $a=1$ 时，$g(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{1}{x}-x$，

由（1）知，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(1)=0, \therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<g(1)=0$.

又 $\because f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，因为 $a_1\in(0,1)$，所以 $a_2=f(a_1)>1$，

$a_3=f(a_2)>1$，…，$a_{n+1}=f(a_n)>1$． ……………………7 分

又 $g(x)\le g(1)=0$．所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=f(a_{n+1})-a_{n+1}<0$，即 $a_{n+2}<a_{n+1}$.

又因为函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 时单调递减，所以 $g(a_{n+2})>g(a_{n+1})$.,

即 $\dfrac{1}{a_{n+2}}+\ln a_{n+2}-a_{n+2}>\dfrac{1}{a_{n+1}}+\ln a_{n+1}-a_{n+1}$.，即 $0>a_{n+3}-a_{n+2}>a_{n+2}-a_{n+1}$.

$\therefore a_{n+1}-a_{n+2}>a_{n+2}-a_{n+3}>0.\ \dfrac{a_{n+1}-a_{n+2}}{a_{n+2}-a_{n+3}}>1, \therefore g(\dfrac{a_{n+1}-a_{n+2}}{a_{n+2}-a_{n+3}})<0$.． …………12 分

22.解：(1)依题意有 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1, a^2=b^2+c^2$，解得 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$,

$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

…………3 分

(2)设 $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$, 则 $D(2x_1,2y_1)$，$\therefore \dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1, \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$.

又 $k_{OP}\bullet k_{OQ}=-\dfrac{3}{4} \therefore 3x_1x_2+4y_1y_2=0$

设 $\overrightarrow{QE}=\lambda\overrightarrow{ED}, \therefore (x_E-x_2, y_E-y_2)=\lambda(2x_1-x_E, 2y_2-y_E), \therefore E(\dfrac{2\lambda x_1+x_2}{1+\lambda}, \dfrac{2\lambda y_1+y_2}{1+\lambda})$.

又 E 在椭圆上，$\therefore \dfrac{4\lambda^2x_1^2+x_2^2+4\lambda x_1x_2}{4(1+\lambda)^2}+\dfrac{4\lambda^2y_1^2+y_2^2+4\lambda y_1y_2}{3(1+\lambda)^2}=1$.

即 $4\lambda^2(\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3})+\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}+4\lambda(\dfrac{x_1x_2}{4}+\dfrac{y_1y_2}{3})=(1+\lambda)^2 \therefore 4\lambda^2+1=(1+\lambda)^2, \therefore \lambda=\dfrac{2}{3}$.

…………6 分

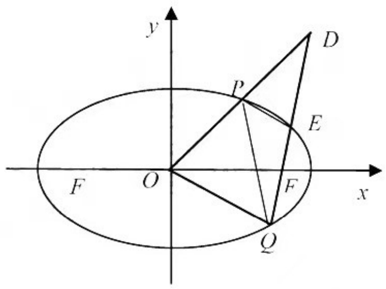
$\therefore \overrightarrow{QE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{ED}, \therefore S_{\triangle PEQ}=\dfrac{2}{5}S_{\triangle QPD}=\dfrac{2}{5}S_{\triangle OPQ}, \therefore S_{四边形OPEQ}=\dfrac{7}{5}S_{\triangle OPQ}$.

当 $PQ // x$ 轴时，$k_{OP}\bullet k_{OQ}=-\dfrac{3}{4}. k_{OP}=-k_{OQ}, \therefore k_{OP}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

根据对称性不妨取 $k_{OP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

由 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$，$\therefore S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}$. ………8 分

当 PQ 斜率存在时，设 PQ 的方程为 $x=my+t$，由



$\begin{cases} x=my+t \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，得 $(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-6mt}{3m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4}$，

$3x_1x_2+4y_1y_2=3(my_1+t)(my_2+t)+4y_1y_2=0$.

$(3m^2+4)y_1y_2+3mt(y_1+y_2)+3t^2=0$. $\therefore (3m^2+4)\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4}-\dfrac{18m^2t^2}{3m^2+4}+3t^2=0$.

$\therefore 2t^2-3m^2-4=0$ 即 $2t^2=3m^2+4$. …………10 分

$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(\dfrac{-6mt}{3m^2+4})^2-\dfrac{4(3t^2-12)}{3m^2+4}}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\dfrac{48(-t^2+3m^2+4)}{(3m^2+4)^2}}$

点 O 到直线 PQ 距离为 $\dfrac{|t|}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|t|\times\dfrac{4\sqrt{3}\times\sqrt{t^2}}{3m^2+4}=\sqrt{3}$. $\therefore S_{四边形OPEQ}=\dfrac{7\sqrt{3}}{5}$. …………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线