

炎德·英才·名校联考联合体 2021 年春季高二期末联考
暨新高三适应性联合考试

数 学

时量:120 分钟 满分:150 分

注意事项:

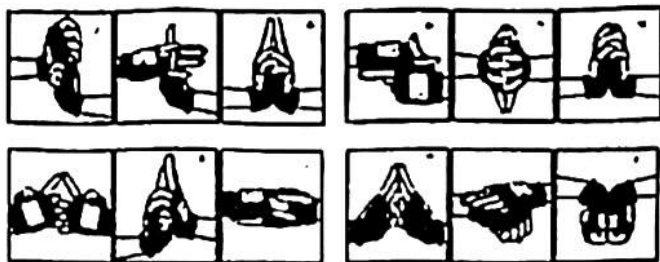
1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求。

1. 集合 $A = \{x | x^2 < 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 5\}$, 则 $A \cap B$ 的子集个数为
A. 3 B. 2 C. 4 D. 8
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC \perp BC$, D 点是 AB 边上的中点, $BC=6$, $CA=8$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的值为
A. -14 B. -6 C. 14 D. -12
3. 一盒子中有 5 个球,其中红球 3 个,白球 2 个,现从中任取两个球,则恰好一个白球一个红球的概率是
A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则
A. $a^2 = 2b^2$ B. $a = 2b$ C. $3a^2 = 4b^2$ D. $3a = 4b$
5. 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x)$ 是增函数, 则 $f(-\pi)$, $f(2)$, $f(3)$ 的大小关系是
A. $f(-\pi) > f(2) > f(3)$ B. $f(-\pi) > f(3) > f(2)$
C. $f(-\pi) < f(2) < f(3)$ D. $f(-\pi) < f(3) < f(2)$
6. 《九章算术》叙述了一个老鼠打洞的趣事:今有垣厚十尺,两鼠对穿.大鼠日一尺,小鼠亦一尺.大鼠日自倍,小鼠日自半.问:何日相逢?各穿几何?意思就是说,有一堵十尺厚的墙,两只老鼠从两边向中间打洞.大老鼠第一天打一尺,小老鼠也是一尺.大老鼠每天的打洞进度是前一天的一倍,小老鼠每天的进度是前一天的一半.第 3 天结束后,两只老鼠相距
A. $\frac{5}{4}$ 尺 B. $\frac{3}{4}$ 尺 C. $\frac{1}{4}$ 尺 D. $\frac{1}{2}$ 尺
7. $(x + \frac{y^2}{x})(x - 2y)^4$ 的展开式中 $x^2 y^3$ 项的系数为
A. -24 B. -40 C. 24 D. -30

数学试题 第 1 页(共 4 页)

8. 动漫作品《火影忍者》描述配合忍术结印的手势有 12 种：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。

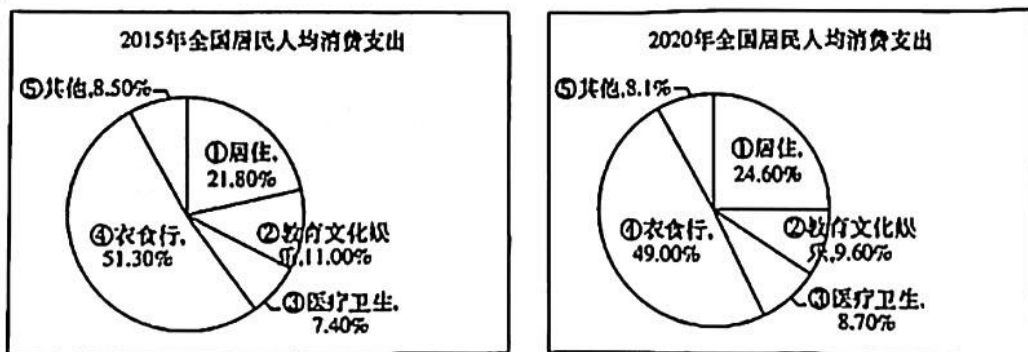


例如从忍者学校毕业考核的分身术的一个要求是需要按正确的顺序在 5 秒内完成未—巳—寅结印手势。漫画描述的忍术都需要配合至少 3 个结印手势且相邻的手势不相同，不同的手势对应不同的忍术。设某忍术需要 n 个手势，则

- A. 当 $n=7$ 时，共有 12^7 种不同的忍术
 B. 当 $n=4$ 时，共有 A_{12}^4 种忍术
 C. 当 $n=3$ 时，共有 1452 种不同忍术
 D. 当 $n=11$ 时的忍术种类是 $n=10$ 的忍术种类的 12 倍

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 随着经济的不断发展，全国居民人均消费支出也逐步增加，已知 2015 年全国居民人均消费支出为 22000 元，通过查阅国家统计局数据发现 2020 年全国居民人均消费支出约为 2015 年的 1.5 倍，下图分别为 2015 年和 2020 年全国居民的人均消费支出及其构成，则下列说法正确的是



- A. 2020 年的全国人均教育文化娱乐支出金额比 2015 年的全国人均教育文化娱乐支出金额多
 B. 2015 年和 2020 年全国人均衣食行支出金额无明显变化
 C. 2020 年全国人均居住和医疗卫生支出金额总和比 2015 年除衣食行外的全国人均支出金额总和多
 D. 随着人均消费支出的增加，人们在居住方面投入越来越多
10. 已知 a, b 为正数，且 $a+b=1$ ，那么下列结论中正确的有

A. $ab + \frac{1}{ab}$ 的最小值是 2

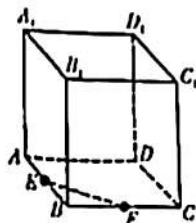
B. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$

D. $2^{a-b} \in (\frac{1}{2}, 2)$

11. 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别为棱 AB, BC 上的中点, 过 E, F 的平面 α 与底面 $ABCD$ 所成的锐二面角为 60° , 则正方体被平面 α 所截的截面形状可能为

- A. 三角形
B. 四边形
C. 五边形
D. 六边形



12. 著名的欧拉公式为: $e^{i\theta} + 1 = 0$, 其中 $i^2 = -1$, e 为自然对数的底数, 它使用几个基本的数学常数描述了实数集和复数集的联系. 其广义一般式是 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$), 该复数在复平面内对应的向量坐标为 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 则下列说法正确的是

A. $\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}i$

B. 若复数 z 满足 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $z^{2021} = \bar{z}$

C. 若复数 $e^{i\alpha}$ 与复数 $e^{i\beta}$ 在复平面内表示的向量相互垂直, 则 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

D. 复数 $e^{i\alpha}$ 与复数 $ie^{i\alpha}$ 在复平面内表示的向量相互垂直

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = xe^{-x} + a$ 在 $[-1, 0]$ 上的最大值为 1, 则函数 $f(x) = xe^{-x} + a$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 _____.

15. 某函数 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称, 且在 $(0, 3)$ 递减, 在 $(3, +\infty)$ 递增, 则此函数可以是 _____ (写出一个满足条件的函数解析式即可)

16. 已知圆 $x^2 + y^2 = 12$ 与抛物线 $x^2 = 4y$ 相交于 A, B 两点, F 为抛物线的焦点, 若直线 l 与抛物线相交于 M, N 两点, 且与圆相切, 切点 D 在劣弧 \widehat{AB} 上, 当直线 l 的斜率为 0 时, $|MF| + |NF| =$ _____; 当直线 l 的斜率不确定时, $|MF| + |NF|$ 的取值范围是 _____.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2\sin B}{b} + \cos C = 1$, $c = 2\sqrt{3}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $a_1 = 1, a_2 = 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

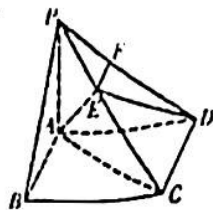
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $b_1 = 1$, 且满足 $3S_n = b_{n+1} - 1$, 记 $c_n = \frac{1}{a_n(\log_3 b_n + 3)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 点 E, F 分别是 PC, PD 上的动点, 且 $PE \cdot FD = PF \cdot EC$.

(1) 求证: $EF \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PE = \frac{1}{3}PC$, 且 PC 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{3}{5}$, 求二面角 $C-AE-D$ 的余弦值.

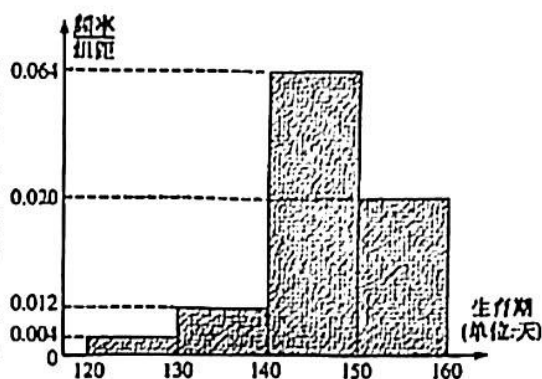


20. (本小题满分 12 分)

杂交水稻的育种理论由袁隆平院士在 1966 年率先提出, 1972 年全国各地农业专家齐聚海南攻关杂交水稻育种, 从此杂交水稻育种在袁隆平院士的理论基础上快速发展. 截至 2021 年 5 月 22 日, 中国国家水稻数据中心收录杂交水稻品种超 1000 种. 如图为部分水稻稻种的生育期天数的频率分布直方图.

(1) 根据频率分布直方图, 估算水稻稻种生育期天数的平均值和中位数; (保留三位有效数字)

(2) 以频率视作概率, 对中国国家水稻中心收录的所有稻种进行检验, 规定: ①检验次数不超过 5 次; ②若检验出 3 个生育期超过第(1)问所求中位数的稻种则检验结束. 设检验结束时, 检验的次数为 X , 求随机变量 X 的分布列和期望.



21. (本小题满分 12 分)

设点 P 为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点, 双曲线 E 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右焦点与椭圆 $G: \frac{x^2}{t+6} + \frac{y^2}{t+3} = 1 (t > 0)$ 的右焦点重合.

(1) 求双曲线 E 的标准方程;

(2) 过点 P 作双曲线两条渐近线的平行线, 分别与两渐近线交于点 A, B . 求证: 平行四边形 $OAPB$ 的面积为定值, 并求出此定值.

22. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = -x \ln x + ax^2 + x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $a = 1, k \in \mathbb{N}, g(x) = x^2 + 2x$, 当 $x > 2$ 时, 不等式 $2k(x-2) + f(x) < g(x)$ 恒成立, 试求 k 的最大值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》