2023—2024 学年度高三第一学月七校联考

高 三 数 学 答 案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	A	C	C	A	B	A	BC	BCD	ACD	ABD

13．$\underline{\quad 7 \quad}$　14．$\underline{\quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad}$　15．$\underline{\left(-\infty, 2\sqrt{3}-1\right)}$　16．$\underline{\ 12\ }$ $\underline{\ 3\ }$

8．【详解】正数 x,y 满足 $y\ln x + y\ln y = \mathrm{e}^x$，

所以 $y\ln(xy) = \mathrm{e}^x$，即 $xy\ln(xy) = x\mathrm{e}^x$，所以 $\ln(xy)\cdot \mathrm{e}^{\ln(xy)} = x\mathrm{e}^x$，

令 $g(x) = x\mathrm{e}^x\,(x>0), g'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(\ln(xy)) = g(x) \Rightarrow x = \ln(xy)$，即 $\mathrm{e}^x = xy$，

所以 $xy - 2x = \mathrm{e}^x - 2x$，令 $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x, f'(x) = \mathrm{e}^x - 2$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上 $f'(x) < 0, f(x)$ 单减；在 $(\ln 2,+\infty)$ 上 $f'(x) > 0, f(x)$ 单增，

所以 $f(x)$ 的最小值是 $f(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2$，所以 $xy - 2x$ 的最小值为 $2 - 2\ln 2$．

选 A

12．【详解】函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - (x-1)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{e}^x - (x-1)\cdot\sin x$，

求导得 $f'(x) = \mathrm{e}^x - \sin x - (x-1)\cos x$，再次求导得 $f''(x) = \mathrm{e}^x - 2\cos x + (x-1)\sin x$，

对于 A，当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时，$\mathrm{e}^x > 0, -\sin x > 0, -(x-1)\cos x > 0$，有 $f'(x) > 0$，函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上单调递增，A 正确；

对于 B，当 $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{e}^x > 0, -\cos x > 0, (x-1)\sin x > 0$，有 $f''(x) > 0$，函数 $f'(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

而 $f'(-\pi) = \mathrm{e}^{-\pi} - \pi - 1 < 0, f'(-\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + 1 > 0$，则 $\exists x_0 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 使得 $f'(x_0) = 0$，

当 $-\pi < x < x_0$ 时，$f'(x) < 0$，当 $x_0 < x < -\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x) > 0$，因此 $f(x)$ 在 $[-\pi, x_0]$ 上递减，在 $[x_0, -\frac{\pi}{2}]$ 上递增，

由选项 A 知，$f(x)$ 在 $[x_0,0]$ 上递增，又 $f(-\pi)=\mathrm{e}^{-\pi}>0, f(0)=1>0, f(x_0)<f(-\frac{\pi}{2})=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}-1<0$，

则 $\exists x_1\in(-\pi,x_0), x_2\in(x_0,0)$，

使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，因此函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上有两个零点，B 正确；

对于 C，对 $\forall x\in[-\pi,0]$ 恒有 $f(x)-2k\geq 0\Leftrightarrow 2k\leq f(x)$，由选项 B 知，$f(x)_{\min}=f(x_0)$，

则有 $2k\leq f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-(x_0-1)\sin x_0$，由 $f'(x_0)=0$ 得：$\mathrm{e}^{x_0}=\sin x_0+(x_0-1)\cos x_0$，

$f(x_0)=\sin x_0+(x_0-1)\cos x_0-(x_0-1)\sin x_0=\sin x_0+(x_0-1)(\cos x_0-\sin x_0)$，

令 $h(x)=\sin x+(x-1)(\cos x-\sin x), -\pi<x<-\frac{\pi}{2}$，$h'(x)=(3-x)\cos x-x\sin x<0$，

函数 $h(x)$ 在 $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$h(x)>h(-\frac{\pi}{2})=-2-\frac{\pi}{2}$，又 $f(x_0)<f(-\frac{\pi}{2})=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}-1$，

则有 $-1-\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}f(x_0)<\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$，因此整数 k 的最大值为 -2，C 不正确；

对于 D，当 $0<x<1$ 时，令 $u(x)=\sin x-x, t(x)=\ln x-(x-1)$，则 $u'(x)=\cos x-1<0, t(x)=\frac{1}{x}-1>0$，

函数 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，$u(x)<u(0)=0$，即 $0<\sin x<x<1$，函数 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，$t(x)<t(1)=0$，即 $\ln x<x-1$，

令 $\varphi(x)=f(x)+\ln x=\mathrm{e}^x-(x-1)\sin x+\ln x<\mathrm{e}^x-(x-1)x+x-1=\mathrm{e}^x-(x-1)^2$，$0<x<1$，

显然 $-(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，则有函数 $y=\mathrm{e}^x-(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

因此 $\mathrm{e}^x-(x-1)^2<\mathrm{e}$，即 $\varphi(x)<\mathrm{e}$，所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)<\mathrm{e}-\ln x$ 成立，D 正确.

故选：ABD

16.【详解】由 $9\sin^2(A-B)+\cos^2 C=1$ 可得 $9\sin^2(A-B)=\sin^2 C$，由 $a>b$，则 $A>B$，则 $\sin C=3\sin(A-B)$．因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+B)=\sin C$，则 $\sin(A+B)=3\sin(A-B)$，$\sin A\cos B=2\cos A\sin B$，则 $a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

则 $a^2+c^2-b^2=2b^2+2c^2-2a^2$，则 $3a^2-c^2=3b^2=12$．因为 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c}{6}$，则

$\sin A=\sqrt{1-\frac{c^2}{36}}$，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{6}\sqrt{c^2(36-c^2)}\leq\frac{1}{6}\sqrt{(\frac{c^2+36-c^2}{2})^2}=3$，当且仅当

$c^2=36-c^2$，即 $c=3\sqrt{2}$ 时取得等号.故 $3a^2-c^2=3b^2=12$，面积最大值为 3.

解答题

17.（1）$\because A=\{x|2<x\le 6\}$，$B=\{x|x^2-4x<0\}=\{x|0<x<4\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|2<x<4\}$，$A\cup B=\{x|0<x\le 6\}$，

$\therefore \complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\le 0$ 或 $x>6\}$，

（2）无论选①还是选②还是选③，均等价于 $C\subseteq B$，

①若 $C=\varnothing$，则 $2m-1\le m+1$，解得 $m\le 2$，

②若 $C\neq\varnothing$，则 $\begin{cases} m+1\ge 0 \\ 2m-1\le 4 \\ 2m-1>m+1 \end{cases}$，解得 $2<m\le\frac{5}{2}$，

综上，$m\le\frac{5}{2}$

18.

（1）$\because$ $f(x)=f(x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-1$

$$=2\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{2}-\sqrt{3}\cos 2x-1$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$$

$$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$$

$$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$，解得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in Z$，

$\backslash$ $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right], k\in Z$；

（2）$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

$\because x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，则 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\therefore f(x)\in[1,2]$，

19.（1）由题设 $f(x)=\ln x-\frac{x}{2},(1\le x\le e)$，则 $f'(x)=\frac{2-x}{2x}$，

所以在 $[1,2)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，在 $(2,\mathrm{e}]$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

则 $f(1)=-\frac{1}{2}<f(\mathrm{e})=1-\frac{\mathrm{e}}{2}$，极大值 $f(2)=\ln 2-1$，

综上，$f(x)$ 最大值为 $\ln 2-1$，最小值为 $-\frac{1}{2}$.

（2）(法 1)根据题意，只需 $g(x)_{\max}<f(x)_{\max}$ 即可，

一方面，由 $g(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ 在 $x\in[-1,2]$ 上 $g(x)_{\max}=g(-1)=5$，

另一方面，由 $f'(x)=a+\frac{1}{x}$ 且 $x\in(0,+\infty)$，

当 $a\ge 0$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 递增且值域为 R，所以满足题设；

当 $a<0$ 时，$(0,-\frac{1}{a})$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；$(-\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；

所以 $f(x)_{\max}=f(-\frac{1}{a})=-1-\ln(-a)$，此时 $-1-\ln(-a)>5$，可得 $a>-\frac{1}{\mathrm{e}^6}$，

综上，a 的取值范围 $(-\frac{1}{\mathrm{e}^6},+\infty)$.

(法 2)因为 $g(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ 在 $x\in[-1,2]$ 上 $g(x)_{\max}=g(-1)=5$，

原问题等价于 $\exists x\in(0,+\infty)$ 使得 $5<ax+\ln x$ 成立，

即 $\exists x\in(0,+\infty)$ 使得 $\frac{5-\ln x}{x}<a$ 成立，即 $\left(\frac{5-\ln x}{x}\right)_{\min}<a\ (x>0)$

令 $h(x)=\frac{5-\ln x}{x}\ (x>0)$，则 $h'(x)=\frac{\ln x-6}{x^2}\ (x>0)$

所以 $h(x)=\frac{5-\ln x}{x}$ 在区间 $(0.e^6)$ 上单减，在区间 $(e^6.+\infty)$ 上单增

所以 $h_{\min}(x)=h(e^6)=-\frac{1}{e^6}$，从而 $a>-\frac{1}{\mathrm{e}^6}$

20.（1）解：因为 $(2b-c)\cdot\cos A=a\cdot\cos C$，由正弦定理可得 $(2\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，

所以，$2\sin B\cos A=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B\ne 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）解：在△ABC 中，因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $(\sqrt{7})^2=b^2+3^2-2\times b\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}$，所以 $b^2-3b+2=0$，解得 $b=2$ 或 $b=1$

当$b=1$时，$\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1+7-9}{2\sqrt{7}}<0$，则$C$为钝角，不符合题意，

当$b=2$时，$\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\dfrac{4+7-9}{4\sqrt{7}}>0$，则$C$为锐角，合乎题意，故$b=2$，

因为D为BC的中点，则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

所以，$\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{4}\left(c^2+b^2+2cb\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}\left(9+4+2\times3\times2\times\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{19}{4}$，故$AD=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.公众号：高中试卷君

21.（1）$y=m\left(9+\dfrac{9}{m}\right)-8m-x=m+9-x=21-x-\dfrac{18}{2x+1}(x>0)$

（2）$y=21-x-\dfrac{18}{2x+1}=21.5-\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{x+\dfrac{1}{2}}\right)\le21.5-2\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{9}{x+\dfrac{1}{2}}}=15.5$，

当且仅当$x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{x+\dfrac{1}{2}}\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$时取等,所以当广告促销费用定为2.5万元的时候，该产品利润最大，为15.5万元

22.

（1）先作换底变换：$f(x)=\dfrac{1+\dfrac{\ln x}{\ln a}}{\dfrac{\ln(x+1)}{\ln a}}=\dfrac{\ln a+\ln x}{\ln(x+1)}$.则$f'(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x(\ln a+\ln x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$，

当$a=2$时$f'(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x(\ln2+\ln x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$，则$f'(1)=\dfrac{1}{2\ln2}$，而$f(1)=1$，

则切线方程为$y-1=\dfrac{1}{2\ln2}(x-1)$，即$x-2\ln2y+2\ln2-1=0$......................**（4分：注，如果没作换底求对了也给分，导数求对给1分，斜率算对1分，函数值求对给1分，方程求对给1分）**

（2）由（1）知$f'(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x(\ln a+\ln x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}(x>0)$，分母不影响符号，故只研究分子的变化情况．设$\varphi(x)=(x+1)\ln(x+1)-x(\ln a+\ln x)(x>0)$，则

$\varphi'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\ln a=\ln\dfrac{x+1}{x}-\ln a$. **..............（1分）**

第一种情形，若$0<a<1$，则$\ln a<0$，而$\ln\frac{x+1}{x}>0$，则$\varphi^{'}(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，则$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又因为当$x\to 0$时，$\varphi(x)\to 0$，则$\varphi(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，即$f^{'}(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$f(x)$在定义域内无极值点. **……………………（1 分）**

第二种情形，若$a>1$，令$\varphi^{'}(x)=0$得$x=\frac{1}{a-1}$，易知$\varphi^{'}(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，当$x\in(0,\frac{1}{a-1})$时，$\varphi^{'}(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，当$x\in(\frac{1}{a-1},+\infty)$时，$\varphi^{'}(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减.而$\varphi(\frac{1}{a-1})=(\frac{1}{a-1}+1)\ln(\frac{1}{a-1}+1)-\frac{1}{a-1}(\ln a+\ln\frac{1}{a-1})=\ln\frac{a}{a-1}>0$，又因为当$x\to 0$时，$\varphi(x)\to 0$，当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to-\infty$，则存在唯一的实数$x_0\in(\frac{1}{a-1},+\infty)$，使得当$x\in(0,x_0)$时，$\varphi(x)>0$，$f(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$\varphi(x)<0$，$f(x)<0$，$f(x)$单调递减，则$x=x_0$为函数$f(x)$的极大值点，所以$a$的取值范围为$(1,+\infty)$. **……………………（3 分）**

由前面的分析知$f(x)$的极大值点x_0满足方程$\varphi(x_0)=(x_0+1)\ln(x_0+1)-x_0(\ln a+\ln x_0)=0$，而$f(x_0)=\frac{\ln a+\ln x_0}{\ln(x_0+1)}$，则$x_0+f(x_0)=x_0+\frac{\ln a+\ln x_0}{\ln(x_0+1)}=x_0+\frac{x_0+1}{x_0}=x_0+\frac{1}{x_0}+1\geq 2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}+1=3$，当且仅当$x_0=1$时取等号，此时$a=2\ln 2$.故$x_0+f(x_0)\geq 3$成立. **………………（3 分）**

（注：如果学生分离参数解决，求a的范围正确给 3 分，证明不等式正确给 5 分，具体细则自行决定，其他情况请酌情给分。）