百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅱ卷　理科数学　参考答案

1. A 【解析】由题得 $A=\{x|x>-4\}$，$B=\{x|x>3\}$，所以 $A\cup B=\{x|x>-4\}$.

2. B 【解析】依题意，$\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$，则 $2a-3b=-8$.

3. D 【解析】$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(6,-2)\cdot(-4,3)}{5}=-6$.

4. B 【解析】设这个正整数为 a. 因为 a 的 62 次方是个 49 位数，所以 $10^{48}\leqslant a^{62}<10^{49}$，即 $\dfrac{48}{62}\leqslant \lg a<\dfrac{49}{62}$，则 $0.77\leqslant \lg a<0.79$，结合表中数据易知，$a=6$.

5. D 【解析】因为数据为 16，16，15，11，12，11，所以平均数为 $\dfrac{16+16+15+11+12+11}{6}=14$.

6. A 【解析】因为 $3^{0.2}>1$，$0<0.1^{0.2}<1$，$\log_3 0.9<0$，所以 $\log_3 0.9<0.1^{0.2}<3^{0.2}$，即 $c<b<a$.

7. D 【解析】对于 A 项，需要满足 n 与 l 相交才符合线面垂直的判定定理，故 A 错误；对于 B 项，有可能 $m\subset\alpha$，故 B 错误；对于 C 项，m 与 β 没有关系，斜交、垂直、平行都有可能，故 C 错误；对于 D 项，若 $n\perp\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则 $n\perp\alpha$，而 $m/\!/\alpha$，故 $m\perp n$，故 D 正确.

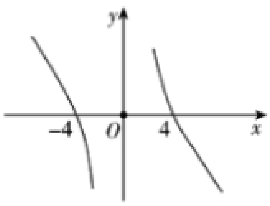
8. B 【解析】抛物线 $C_1:y^2=-4x$ 的焦点为 $(-1,0)$，则椭圆 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的一个焦点为 $(-1,0)$，则 $a^2=3+1=4$，解得 $a=2$，所以 C_2 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$.

9. D 【解析】若将函数 $y=3\cos(4x-\dfrac{\pi}{7})$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），可得 $y=3\cos(2x-\dfrac{\pi}{7})$，然后向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，可得 $y=3\cos[2(x+\dfrac{\pi}{12})-\dfrac{\pi}{7}]=3\cos(2x+\dfrac{\pi}{42})$，令 $2x+\dfrac{\pi}{42}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{21}(k\in\mathbf{Z})$，则得到的函数图象的对称中心为 $(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{21},0)(k\in\mathbf{Z})$.

10. A 【解析】依题意，$|F_1A'|=|A'B'|=|B'M|$，根据平行线分线段成比例定理，得 $|F_1A|=|AB|=|BF_2|$，则 $2a=c-a$，即 $a=\dfrac{1}{3}c$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=3$.

11. D 【解析】由 $\sin2\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=0$，$\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，得 $2\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=\sin\alpha(2\cos\alpha-\sqrt{3})=0$，所以 $2\cos\alpha-\sqrt{3}=0$，解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$，$\tan2\alpha=\tan(-\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$，所以 $\tan(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\times1}=\sqrt{3}-2$.

12. B 【解析】因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-4)=-f(4)=0$，所以 $f(4)=0$，因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. 故作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，所以对于 $\dfrac{f(x+2)-f(-x-2)}{x}>0$，等价于 $\dfrac{f(x+2)-f[-(x+2)]}{x}>0$，得 $\dfrac{2f(x+2)}{x}>0$，则 $\begin{cases}x<0\\f(x+2)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\f(x+2)>0\end{cases}$，



则$\begin{cases}x<0\\-4<x+2<0\end{cases}$或$\begin{cases}x>0\\0<x+2<4\end{cases}$，解得$-6<x<-2$或$0<x<2$. 综上，$\frac{f(x+2)-f(-x-2)}{x}>0$的解集是$(-6,-2)\cup(0,2)$.

13. 0.78 【解析】设抽到一等品、二等品、三等品的事件分别为A,B,C. 则$\begin{cases}P(A)+P(B)=0.93\\P(A)+P(C)=0.85\\P(A)+P(B)+P(C)=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}P(C)=0.07\\P(B)=0.15\\P(A)=0.78\end{cases}$，则抽到一等品的概率为0.78.

14. -2 【解析】若$f(1)=-1$，则$f(-1)=1$，即$f(-1)=\log_3(-a+1)=1$，则$-a+1=3$，解得$a=-2$.

15. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$ 【解析】由$b^2+c^2-a^2=bc$及余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$. 又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. 由$\sin C=3\sin B$，得$c=3b$，根据余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$7=b^2+9b^2-3b^2=7b^2$，解得$b=1$或$b=-1$(舍去). 所以$c=3$. 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{\sin C}$，解得$\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

16. 5 【解析】设该二十四等边体的棱长为1，则正四面体魔方的棱长也为1，则该二十四等边体的表面积为$8\times\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+6\times1^2=2\sqrt{3}+6$，正四面体的表面积为$4\times\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，而$\frac{2\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}}=2+\frac{6}{\sqrt{3}}\approx5.46$，所以至少可以涂5个这样正四面体魔方.

17.【解析】(1)设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

由题意可得$\begin{cases}a_2=9\\a_1+a_3=2(a_1+a_2+3)\end{cases}$，…………………… 1分

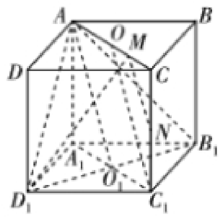
则$\begin{cases}a_2=9\\\frac{9}{q}+9q=2(\frac{9}{q}+9+3)\end{cases}$，…………………… 3分

解得$q=3$或$q=-\frac{1}{3}$(舍去)，…………………… 6分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_2\cdot q^{n-2}=9\cdot3^{n-2}=3^n$. …………………… 8分

(2)$S_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+n)\cdot n}{2}=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{n^2}{4}-\frac{n}{4}-\frac{3}{2}$. …… 12分

18.【解析】(1)如图，取AC的中点O，连接A_1C_1与B_1D_1交于点O_1，连接OC_1，AO_1.



则M是CO的中点，又N是CC_1的中点，则$MN\parallel C_1O$. …………………… 2分

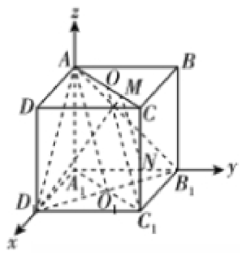
因为$AO=C_1O_1$，$AO\parallel C_1O_1$，所以AOC_1O_1是平行四边形，所以$AO_1\parallel C_1O$，…… 4分

所以$MN\parallel AO_1$. …………………… 5分

又$MN\not\subset$平面AB_1D_1，$AO_1\subset$平面AB_1D_1，

所以$MN\parallel$平面AB_1D_1. …………………… 6分

(2)分别以A_1D_1，A_1B_1，A_1A所在的直线为x，y，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



不妨设$AA_1=A_1B_1=A_1D_1=4$，则$A(0,0,4)$，$D_1(4,0,0)$，$M(3,3,4)$，$N(4,4,2)$，

所以$\overrightarrow{MN}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(4,0,-4)$，$\overrightarrow{AM}=(3,3,0)$. …………………… 8分

设平面AD_1M的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=(x,y,z)\cdot(4,0,-4)=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=(x,y,z)\cdot(3,3,0)=0\end{cases}$，得$\begin{cases}4x-4z=0\\3x+3y=0\end{cases}$，得$\begin{cases}z=x\\y=-x\end{cases}$，

令$x=1$，得平面AD_1M的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$；…………………… 10分

设直线 MN 与平面 AD_1M 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{MN}\rangle|=|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MN}|}|=|\dfrac{(1,-1,1)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

即直线 MN 与平面 AD_1M 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ………………………………… 12 分

19.【解析】(1)根据分层抽样的特点，选出的下载量超过 200 的个数为 $6\times\dfrac{16}{48}=2$ 个. ………………… 3 分

(2)X 的可能取值为 500，1000，1500，2000. ………………………………………………… 5 分

$P(X=500)=\dfrac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$；$P(X=1000)=\dfrac{C_3^2+C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{3}$；

$P(X=1500)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$；$P(X=2000)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$. ………………………………………… 9 分

则奖励金额 X 的分布列为：

X	500	1000	1500	2000
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{1}{15}$

………………………………………………………………………………………… 10 分

故奖励金额 X 的数学期望 $E(X)=500\times\dfrac{1}{5}+1000\times\dfrac{1}{3}+1500\times\dfrac{2}{5}+2000\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{3500}{3}$. ………… 12 分

20.【解析】(1)设椭圆 C 的半焦距为 c.

因为$\triangle MNF_2$，$\triangle MF_1F_2$ 的周长分别为 8，6.

所以根据椭圆的定义得$\begin{cases}4a=8\\2a+2c=6\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\c=1\\b=\sqrt{3}\end{cases}$. ………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 4 分

(2)根据题意，可设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)(k>0)$.

联立$\begin{cases}y=k(x+1)\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x，得$(3+4k^2)y^2-6ky-9k^2=0$.

则 $\Delta=144k^2(k^2+1)>0$. ………………………………………………………… 5 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{6k}{3+4k^2}$①，

$y_1y_2=\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}$②. ……………………………………………………………… 6 分

又$\dfrac{|MF_1|}{|MN|}=m$，且$\dfrac{2}{3}\leqslant m<\dfrac{3}{4}$，则$\dfrac{|MF_1|}{|F_1N|}=\dfrac{m}{1-m}\in[2,3)$.

设$\dfrac{m}{1-m}=\lambda$，$\lambda\in[2,3)$.

则$\overrightarrow{MF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1N}$，所以 $y_1=-\lambda y_2$③，………………………………………… 7 分

把③代入①得 $y_2=\dfrac{6k}{(1-\lambda)(3+4k^2)}$，$y_1=\dfrac{-6\lambda k}{(1-\lambda)(3+4k^2)}$，

并结合②可得 $y_1y_2=\dfrac{-36\lambda k^2}{(1-\lambda)^2(3+4k^2)^2}=\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}$，

则$\dfrac{(1-\lambda)^2}{\lambda}=\dfrac{4}{3+4k^2}$，即 $\lambda+\dfrac{1}{\lambda}-2=\dfrac{4}{3+4k^2}$，……………………………… 9 分

因为 $\lambda+\frac{1}{\lambda}-2$ 在 $\lambda\in[2,3)$ 上单调递增，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\lambda+\frac{1}{\lambda}-2<\frac{4}{3}$，……………………………… 10 分

即 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{4}{3+4k^2}<\frac{4}{3}$，且 $k>0$，解得 $0<k\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，…………………………………… 11 分

即 $0<\tan\theta\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $0<\sin\theta\leqslant\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故 $\sin\theta$ 的取值范围是 $(0,\frac{\sqrt{5}}{3}]$. ………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)-2}{e^x}$，……………………………………………… 1 分

则切线的斜率为 $f'(0)=-1$. ………………………………………………………… 2 分

又 $f(0)=2$，所以函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-2=-(x-0)$，即 $x+y-2=0$. ……… 3 分

切线 $x+y-2=0$ 与坐标轴的两个交点坐标依次为 $(2,0)$，$(0,2)$.

故切线与坐标轴所围成三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\times2\times2=2$. ……………………………… 4 分

(2) $f(x)<e^m$ 等价于 $\frac{\ln(x+1)+2}{e^x}<e^m$，整理得 $\ln(x+1)+2<e^{x+m}$.

因为 $m\geqslant1$，所以 $e^{x+m}\geqslant e^{x+1}$，要证 $e^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$ 成立，只需证 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$ 即可，……
……………………………………………………………………………………………… 5 分

设 $h(x)=e^{x+1}-\ln(x+1)-2$，则 $h'(x)=e^{x+1}-\frac{1}{x+1}$.

设 $p(x)=e^{x+1}-\frac{1}{x+1}$，则 $p'(x)=e^{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$. ……………………………… 6 分

所以 $p(x)=h'(x)=e^{x+1}-\frac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h'(-\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$h'(0)=e-1>0$.

所以 $h'(x)=e^{x+1}-\frac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有唯一零点 x_0，且 $x_0\in(-\frac{1}{2},0)$，…………………… 8 分

因为 $h'(x_0)=0$，所以 $e^{x_0+1}=\frac{1}{x_0+1}$，即 $\ln(x_0+1)=-(x_0+1)$，

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数.

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数，

所以当 $x=x_0$ 时，$h(x)$ 有最小值 $h(x_0)$. ………………………………………………… 10 分

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0+1}-\ln(x_0+1)-2=\frac{1}{x_0+1}+(x_0+1)-2>0$，

即 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$ 成立，即 $f(x)<e$ 恒成立. ………………………………… 11 分

综上可知，对于 $\forall m\in[1,+\infty)$ 都有 $f(x)<e^m$. ………………………………… 12 分

另解：(2) $f(x)<e^m$ 等价于 $\frac{\ln(x+1)+2}{e^x}<e^m$，整理得 $\ln(x+1)+2<e^{x+m}$，

因为 $m\geqslant1$，所以 $e^{x+m}\geqslant e^{x+1}$.

要证 $e^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$ 成立，只需证 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$ 即可，…………………… 5 分

易证：$e^{x+1}\geqslant x+2$（当且仅当 $x=-1$ 时等号成立），……………………………… 7 分

易证：$\ln(x+1)\leqslant x$（当且仅当 $x=0$ 时等号成立），………………………………… 9 分

故 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2\geqslant(x+2)-x-2=0$，又等号不同时取到，…………………… 10 分

故 $e^{x+1}-\ln(x+1)-2>0$ 恒成立，即 $f(x)<e$ 恒成立. ………………………… 11 分

所以对于 $\forall m\in[1,+\infty)$ 都有 $f(x)<e^m$. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$得，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=(\frac{x}{2})^2+y^2=1$，

即$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，故曲线C的普通方程是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 2分

由$2\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta=12$及公式$\begin{cases}\rho\cos\theta=x\\\rho\sin\theta=y\end{cases}$，

得$2x-3y=12$，故直线l的直角坐标方程是$2x-3y-12=0$. ………………………………………… 5分

(2)直线l的普通方程为$2x-3y-12=0$，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），

设$Q(2\cos\theta,\sin\theta)$，点$Q$到直线$2x-3y-12=0$距离为$d=\frac{|4\cos\theta-3\sin\theta-12|}{\sqrt{13}}=\frac{|5\cos(\theta+\varphi)-12|}{\sqrt{13}}$（其中

$\tan\varphi=\frac{3}{4}$）， ………………………………………… 8分

当$\cos(\theta+\varphi)=1$时，$d_{\min}=\frac{7\sqrt{13}}{13}$，所以$|PQ|_{\min}=\frac{7\sqrt{13}}{13}$. ………………………………………… 10分

23.【解析】(1)依题意，$|3x+3|+|x+2|>10$. ………………………………………… 1分

当$x<-2$时，$-3x-3-x-2>10$，解得$x<-\frac{15}{4}$；

当$-2\leqslant x\leqslant-1$时，$-3x-3+x+2>10$，解得$x<-\frac{11}{2}$，无解；

当$x>-1$时，$3x+3+x+2>10$，则$x>\frac{5}{4}$，故$x>\frac{5}{4}$；

故不等式$f(x)>10$的解集为$(-\infty,-\frac{15}{4})\cup(\frac{5}{4},+\infty)$. ………………………………………… 5分

(2)依题意，$f(x)=|3x+3|+|x+2|=\begin{cases}-4x-5,x<-2\\-2x-1,-2\leqslant x\leqslant-1\\4x+5,x>-1\end{cases}$. ………………………………………… 7分

数形结合易知$f(x)_{\min}=1$，即$f(x)$的值域为$[1,+\infty)$. ………………………………………… 8分

因为方程$f(x)=3-4a$有实数解，

所以$3-4a\geqslant1$，解得$a\leqslant\frac{1}{2}$，

故实数a的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$. ………………………………………… 10分

关于我们