高三数学考试参考答案(文科)

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

$A=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$,$B=[1,+\infty)$,则 $A\cap B=[1,2\sqrt{2})$.

2. A 【解析】本题考查复数的运算,考查运算求解能力.

由题意可得 $z^2+1=(1-i)^2+1=1-2i$,则 $|z^2+1|=\sqrt{5}$.

3. C 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查运算求解能力.

由 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,m)$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+6$,得 $\sqrt{4+m^2}=-1+6$,所以 $m^2=21$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+21}=\sqrt{22}$.

4. D 【解析】本题考查指数和对数的运算,考查逻辑推理的核心素养.

$a=\log_5 3>\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$,$b=e^{-1}=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$,$c=\log_{16}9\cdot\log_{27}8=\frac{\lg 9}{\lg 16}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 27}=\frac{2\lg 3}{4\lg 2}\cdot\frac{3\lg 2}{3\lg 3}=\frac{1}{2}$,所以 $b<c<a$.来源：高三答案公众号

5. B 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想.

作出可行域(图略),当直线 $z=4x-2y$ 经过点 $A(-1,1)$时,z 有最小值,且最小值为-6.

6. B 【解析】本题考查算法,考查逻辑推理的核心素养.

由程序框图知,第一次运行,$S=1$,$k=2$;第二次运行,$S=1+4=5$,$k=3$;第三次运行,$S=5+9=14$,$k=4$;第四次运行,$S=14+16=30$,$k=5$;第五次运行,$S=30+25=55$,$k=6$;第六次运行,$S=55+36=91$,$k=7$;第七次运行,$S=91+49=140>111$,$k=8$,所以输出 $k=8$.

7. C 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查逻辑推理的核心素养.

$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$,由题可知函数 $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,

则 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega=4$,即 $f(x)=\sqrt{2}\sin(4x+\frac{\pi}{4})$,所以 $f(x+\frac{\pi}{16})=\sqrt{2}\sin(4x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\cos 4x$ 为偶函数.

8. C 【解析】本题考查等比数列和等差数列的定义,考查逻辑推理的核心素养.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,若$\{a_{b_n}\}$是等比数列,则$\frac{a_{b_{n+1}}}{a_{b_n}}=\frac{a_1q^{b_{n+1}-1}}{a_1q^{b_n-1}}=q^{b_{n+1}-b_n}$为常数,即 $b_{n+1}-b_n$ 为常数,所以$\{b_n\}$是等差数列;若$\{b_n\}$是等差数列,设$\{b_n\}$的公差为 d,则$\frac{a_{b_{n+1}}}{a_{b_n}}=\frac{a_1q^{b_{n+1}-1}}{a_1q^{b_n-1}}=q^{b_{n+1}-b_n}=q^d$ 为常数,所以$\{a_{b_n}\}$是等比数列.综上,“$\{a_{b_n}\}$是等比数列”是“$\{b_n\}$是等差数列”的充要条件.

9. D 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

由题可知 $\tan\angle FCB=\tan(\angle FCE+\angle BCE)=\frac{\tan\angle FCE+\tan\angle BCE}{1-\tan\angle FCE\cdot\tan\angle BCE}=\frac{1+\frac{3}{5}}{1-1\times\frac{3}{5}}=4$,

则 $\tan\angle FCD=\frac{1}{4}$,即 $CD=4DF$,$AD=4DF$.

10. B 【解析】本题考查导数的应用,考查抽象概括能力.

当 $x=0$ 时,由 $xf'(x)-f(x)=1$,得 $f(0)=-1$;当 $x\neq 0$ 时,可得$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}$,则$[\frac{f(x)}{x}]'=\frac{1}{x^2}$,所以$\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{x}+c$($c$ 为常数),所以$f(x)=cx-1$,选项 A,C,D 分别符合 $c>0$,$c<0$,$c=0$,故选 B.

11. A 【解析】本题考查球的应用,考查空间想象能力.

设直三棱柱的高为 h,外接球的半径为 R,$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r,则 $3\times\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{3}h=3\sqrt{3}$,所以 $r^2h=4$,

又 $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{h^2}{4}+\frac{4}{h}$,令 $f(h)=\frac{h^2}{4}+\frac{4}{h}$,则 $f'(h)=\frac{h}{2}-\frac{4}{h^2}=\frac{h^3-8}{2h^2}$,易知 $f(h)$ 的最小值为 $f(2)=3$,

此时 $R^2=3$,所以该三棱柱外接球表面积的最小值为 12π. 来源:高三答案公众号

12. A 【解析】本题考查双曲线的综合,考查数学运算和逻辑推理的核心素养.

设 D 为 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{FD}$,则 $D(\frac{3c}{2},-\frac{3b}{2})$. 因为直线 l 与 E 的右支交于 A,B 两点,所以 $\frac{\frac{9c^2}{4}}{a^2}-\frac{9}{4}>1$,解得 $\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{13}}{3}$,经验证,当离心率为 $\sqrt{3}$ 时,M,F,A,B 四点共线,即 E 的离心率的取值范围为 $(\frac{\sqrt{13}}{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

13. $\sqrt{2}\pi$ 【解析】本题考查圆锥,考查空间想象能力.

设直角圆锥侧面展开图的圆心角的弧度数为 α,底面圆的半径为 r,母线长为 l,因为直角圆锥的轴截面为等腰直角三角形,所以 $l=\sqrt{2}r$,则 $\alpha l=2\pi r$,解得 $\alpha=\sqrt{2}\pi$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】本题考查解三角形,考查运算求解能力.

由 $a\cos(B-C)+a\cos A=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$,可得 $a\cos(B-C)-a\cos(B+C)=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$,

所以 $a\cos B\cos C+a\sin B\sin C-a(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$,

即 $a\sin B\sin C=\sqrt{3}c\sin B\cos A$,由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$,

所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$,所以 $\tan A=\sqrt{3}$,即 $A=\frac{\pi}{3}$.

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-bc$,

所以 $bc=2$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $\frac{2}{5}$ 【解析】本题考查古典概型,考查逻辑推理的核心素养.

从 O,A,B,C,D 五点中任取三点有 $\{O,A,B\}$,$\{O,A,C\}$,$\{O,A,D\}$,$\{O,B,C\}$,$\{O,B,D\}$,$\{O,C,D\}$,$\{A,B,C\}$,$\{A,B,D\}$,$\{A,C,D\}$,$\{B,C,D\}$,共 10 种不同取法,

取到的三点恰好在同一个侧面有 $\{O,A,B\}$,$\{O,A,C\}$,$\{O,A,D\}$,$\{O,B,C\}$,共 4 种情况.

由古典概型的概率计算公式知,所求的概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

16. $2\sqrt{2}x+y-3=0$ 或 $2\sqrt{2}x-y+3=0$ 或 $4\sqrt{3}x-y-7=0$ 或 $4\sqrt{3}x+y+7=0$(写对一个即可得满分)

【解析】本题考查切线方程,考查数形结合的数学思想.

设切线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于点 $(x_0,y_0)(y_0\neq0)$,则 $x_0^2+y_0^2=1$,切线 l 的方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$,

即 $xx_0+yy_0=1$,将 $xx_0+yy_0=1$ 与 $y=x^2+5$ 联立,可得 $y_0x^2+xx_0+5y_0-1=0$,$\Delta=x_0^2-4y_0(5y_0-1)=0$,解得 $\begin{cases}x_0=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\y_0=\frac{1}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{2\sqrt{2}}{3},\\y_0=\frac{1}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=\frac{4\sqrt{3}}{7},\\y_0=-\frac{1}{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{4\sqrt{3}}{7},\\y_0=-\frac{1}{7},\end{cases}$ 所以切线 l 的方程为 $2\sqrt{2}x+y-3=0$ 或 $2\sqrt{2}x-y+3=0$ 或 $4\sqrt{3}x-y-7=0$ 或 $4\sqrt{3}x+y+7=0$.

17. 解:(1)根据以上数据,这 40 名学生期末考试的数学成绩小于 100 分的概率为 $\frac{4}{40}+\frac{14}{40}+\frac{16}{40}\times\frac{1}{2}=0.65$,

因此这 40 名学生期末考试的数学成绩小于 100 分的概率的估计值为 0.65. ……………………………… 6 分

(2)期中考试的数学成绩平均分为 $(60\times4+80\times14+100\times16+120\times4+140\times2)\div40=93$ 分; ……… 8 分

期末考试的数学成绩平均分为 $(60\times6+80\times10+100\times12+120\times8+140\times4)\div40=97$ 分. ………… 10 分

所以估计这 40 名学生期末考试的数学成绩的平均分比期中考试数学成绩的平均分提高 4 分. …… 12 分

18. 解：(1)当 $n=1$ 时，可得 $a_1=1$， ………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=n$，

$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=n-1(n\geqslant 2)$， ………………………………………… 2 分

上述两式作差可得 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}(n\geqslant 2)$， ………………………………………… 4 分

因为 $a_1=1$ 满足 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$. ………………………………………… 6 分

(2) $c_n=\begin{cases}\dfrac{2n-1}{19}, & n \text{ 为奇数，来源：高三答案公众号}\\[2mm] \dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)}, & n \text{ 为偶数，}\end{cases}$

所以 $c_1+c_3+\cdots+c_{19}=\dfrac{1+5+9+\cdots+37}{19}=\dfrac{(1+37)\times 10}{2\times 19}=10$， ………………………………………… 8 分

$c_2+c_4+\cdots+c_{20}=\dfrac{1}{3\times 7}+\dfrac{1}{7\times 11}+\cdots+\dfrac{1}{39\times 43}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\cdots+\dfrac{1}{39}-\dfrac{1}{43}\right)=\dfrac{10}{129}$. ……… 10 分

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 20 项和为 $\dfrac{1300}{129}$. ………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问未求 a_1，直接得出 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，扣 2 分.

【2】第(2)问结果未写成假分数，扣 2 分.

19. (1)证明：因为在 $\triangle ABC$ 中，$EF\perp AB$，所以 $EF\perp AF$，$EF\perp FB'$， …… 2 分

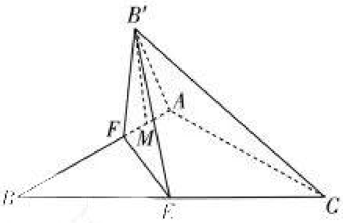
又 $AF\cap FB'=F$，所以 $EF\perp$ 平面 AFB'. ………………………… 3 分

因为 $AB'\subset$ 平面 AFB'，所以 $EF\perp AB'$. ………………………… 5 分

(2)解：作 $B'M\perp AB$ 交 AB 于 M，因为 $EF\perp$ 平面 AFB'，所以 $B'M\perp EF$，

………………………………………… 6 分

又 $AB\cap EF=F$，所以 $B'M\perp$ 平面 $ACEF$. ………………………… 8 分



由 $BF=3$，$\angle B'FA=\dfrac{\pi}{3}$，则 $B'M=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 9 分

四边形 $ACEF$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$， ………………………… 10 分

所以四棱锥 $B'-ACEF$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15}{4}$. ………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问共 5 分，证出 $EF\perp AF$，$EF\perp FB'$，得 2 分，说明 $AF\cap FB'=F$ 并证出 $EF\perp$ 平面 AFB'，得 1 分，证出 $EF\perp AB'$，得 2 分.

【2】其他方法按步骤酌情给分.

20. (1)解：由 PF 垂直于 x 轴，可得 $c=1$. ………………………………………… 1 分

将点 P 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1$， ………………………………………… 2 分

又 $a^2=b^2+c^2$， ………………………………………… 3 分

解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$， ………………………………………… 4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 5 分

(2)证明：由(1)知，$c=1$，则椭圆 C 的右焦点坐标为 $(1,0)$.

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，D 的坐标为 $(x_0,k(x_0-1))$. ………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将直线 AB 的方程与椭圆 C 的方程联立得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

$\Delta=(-8k^2)^2-4(4k^2+3)(4k^2-12)=144(k^2+1)>0$ 恒成立,

由韦达定理知 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2},\end{cases}$ ………………………………………… 8 分

又 $y_1=k(x_1-1)$,$y_2=k(x_2-1)$,所以 $k_1+k_3=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\dfrac{k(x_1-1)-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2-1)-\frac{3}{2}}{x_2-1}=2k-$

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=2k-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\frac{8k^2}{3+4k^2}-2}{\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-\frac{8k^2}{3+4k^2}+1}=2k-1$. ………………………………… 10 分

因为 $k_1+k_3=2k_2$,所以 $\dfrac{k(x_0-1)-\frac{3}{2}}{x_0-1}=k-\dfrac{1}{2}$,解得 $x_0=4$,即点 D 的横坐标为定值. ……………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问共 5 分,正确算出 c 的值,得 1 分,正确算出 a 和 b 的值,得 3 分,正确写出 C 的方程,得 1 分.

【2】第(2)问共 7 分,正确联立方程,得 1 分,写出韦达定理,得 1 分,正确算出 k_1+k_3,得 2 分,得出点 D 的横坐标为 4,得 2 分.

【3】其他方法按步骤酌情给分.

21. 解:(1)由题可知 $f'(x)=xe^x$. ………………………………………………… 1 分

因此,当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f(x)$ 单调递减;当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)$ 单调递增. ……………………… 3 分

所以当 $x=0$ 时,$f(x)$ 取得极小值 -1,无极大值. ……………………………………… 5 分

(2)当 $-2<m\leqslant0$ 时,$f(x)_{\min}=f(m)=(m-1)e^m$. ……………………………………… 6 分

依题意可知 $f(m)+g(m)\leqslant0\Rightarrow me^m+\ln(m+2)-e^m\leqslant0$. ……………………………… 7 分

构造函数 $\varphi(x)=e^x-x-1$,则 $\varphi'(x)=e^x-1$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 单调递减;

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$\varphi'(m)>0$,$\varphi(x)$ 单调递增.

即 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$,所以 $e^x\geqslant x+1$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,

由 $e^x\geqslant x+1$,可得 $x-1\geqslant\ln x$,即 $x+1\geqslant\ln(x+2)$,当且仅当 $x=-1$ 时,等号成立,所以 $e^m-\ln(m+2)>0$.

………………………………………………………………………………………… 8 分

故当 $-2<m\leqslant0$ 时,$me^m+\ln(m+2)-e^m\leqslant0$ 恒成立. ………………………………… 9 分

当 $m>0$ 时,$f(x)_{\min}=f(0)=-1$. ……………………………………………… 10 分

依据题意可知 $-1+\ln(m+2)\leqslant0$,解得 $0<m\leqslant e-2$. …………………………………… 11 分

综上所述,m 的取值范围为 $(-2,e-2]$. ……………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中未说明无极大值,不扣分.

【2】其他方法按步骤酌情给分.

22. 解:(1)由曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+2,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数),得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=2$,即 $x^2+y^2-4x+2=0$, ………………………………………………………… 1 分

则曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+2=0$. ……………………………………… 3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$. ……………………………………………… 5 分

(2)将直线 l 的极坐标方程代入曲线 C 的极坐标方程,得 $\rho^2-4\rho\cos\alpha+2=0$, ……………………… 7 分

又 $\rho_1\cdot\rho_2=2>0$,所以 $|OA|+|OB|=|\rho_1+\rho_2|=|4\cos\alpha|=3$,即 $\cos\alpha=\pm\dfrac{3}{4}$, ……………………… 9 分

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$. …………………………………………………………… 10 分

评分细则：来源：高三答案公众号

【1】第(1)问中，得出曲线 C 的普通方程得 1 分，得出曲线 C 的极坐标方程得 2 分，正确写出直线 l 的极坐标方程得 2 分.

【2】第(2)问中，也可根据在直角坐标方程中，直线与圆联立求出坐标，答案正确得满分，答案错误，按步骤酌情给分.

23.(1)解：由题可得 $|x|<2x-1$，所以 $-(2x-1)<x<2x-1$， …………………………………………………… 3 分

解得 $x>1$，所以不等式 $f(x)<2x-1$ 的解集为 $(1,+\infty)$. …………………………………………………… 5 分

(2)证明：$g(x)=|2x|+|2x-1|\geq|2x-(2x-1)|=1$，则 $m=1$，…………………………………………………… 7 分

则 $(a+b)+(b+c)=1$，

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c})[(a+b)+(b+c)]=2+\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}\geq4$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立. ………

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问中，也可分类讨论解不等式，分 $x\geq0$ 和 $x<0$ 两种情况，每种情况占 2 分，最终答案未写成解集形式，不扣分；

【2】第(2)问中，不管用哪种方法，计算出 $g(x)$ 的最小值得 2 分，证明 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq4$，也可采用柯西不等式，$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c})[(a+b)+(b+c)]\geq(1+1)^2=4$.