江苏省南通、泰州、扬州、徐州、淮安、连云港、宿迁七市 2022 届高三第二次调研测试

数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $(C_U A)\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

【答案】 C

【解析】 $C_U A=\{-3,-2,2,3\}$，$(C_U A)\cap B=\{2,3\}$，选 C.

2. 已知复数 z 满足 $z(1+2i)=i(1+z)$，则 $z=$

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　　B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　C. $1+I$　　D. $1-i$

【答案】 A

【解析】 令 $z=a+bi$，$\therefore (a+bi)(1+2i)=i(1+a+bi)$，

$$a+2ai+bi-2b=(a+1)i-b,\ \therefore \begin{cases} a-2b=-b \\ 2a+b=a+1 \end{cases},\ \therefore \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，选 A.

3．已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-18$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．30°　　B．60°　　C．120°　　D．150°

【答案】 B

【解析】 $(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})=-18$，$\therefore \vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2=-18$，$\therefore 9-\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times4=-18$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$，$\therefore\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{21}{3}$，选 B.

4．时钟花是原产于南美热带雨林的藤蔓植物，从开放到闭合与体内的一种时钟酶有关．研究表明，当气温上升到 20°C 时，时钟酶活跃起来，花朵开始开放；当气温上升到 28°C 时，时钟酶的活性减弱，花朵开始闭合，且每天开闭一次．已知某景区一天内 5~17 时的气温 T(单位：°C)与时间 t(单位：h)近似满足关系式 $T=20-10\sin(\frac{\pi}{8}t-\frac{\pi}{8})$，则该景区这天时钟花从开始开放到开始闭合约经历$(\sin\frac{3\pi}{10}\approx0.8)$

A．1.4h　　B．2.4h　　C．3.2h　　D．5.6h

【答案】 B

【解析】 $20-10\sin\left(\frac{\pi}{8}t_1-\frac{\pi}{8}\right)=0$，$t_1=9$，$20-10\sin\left(\frac{\pi}{8}t_2-\frac{\pi}{8}\right)=28$，

$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{8}t_2-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{4}{5}$，$\frac{\pi}{8}t_2-\frac{\pi}{8}=\frac{13\pi}{10}$，$\therefore t_2=\frac{57}{5}$，$\therefore t_2-t_1=\frac{12}{5}=2.4$，选 B.

5．设$(1+3x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_5=a_6$，则 $n=$

A．6　　B．7　　C．10　　D．11

【答案】 B

【解析】 $(1+3x)^n$展开式第$r+1$项$T_{r+1}=C_n^r(3x)^r=C_n^r3^rx^r$，$a_5=a_6$，

$\therefore C_n^5 3^5=C_n^6 3^6$，$\therefore C_n^5=3C_n^6$，$n=7$，选 B.

6．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n，则“$d>0$”是“$S_n+S_{3n}>2S_{2n}$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】$S_n+S_{3n}>2S_{2n}\Leftrightarrow S_{3n}-S_{2n}>S_{2n}-S_n$

$\Leftrightarrow a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}>a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$

$\Leftrightarrow(a_{2n+1}-a_{n+1})+(a_{2n+2}-a_{n+2})+\cdots+(a_{3n}-a_{2n})>0\Leftrightarrow ndn>0\Leftrightarrow d>0$，

$\therefore$ “$d>0$”是“$S_n+S_{3n}>2S_{2n}$”的充要条件.选 C.

7．在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1，0)$，$B(9，6)$，动点 C 在线段 OB 上，$BD\perp y$ 轴，$CE\perp y$ 轴，$CF\perp BD$，垂足分别是 D，E，F，OF 与 CE 相交于点 P．已知点 Q 在点 P 的轨迹上，且 $\angle OAQ=120°$，则 $|AQ|=$

A．4　　　B．2　　　C．$\frac{4}{3}$　　　D．$\frac{2}{3}$

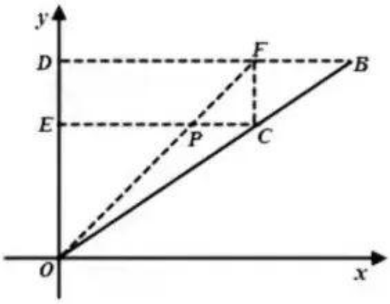
【答案】A

【解析】设 $P(x,y)$，则 $y_C=y$，$OB:y=\frac{2}{3}x$，$\therefore C\left(\frac{3}{2}y,y\right)$，$E(0,y)$，$\therefore F\left(\frac{3}{2}y,6\right)$

$\triangle OPE\backsim\triangle FPC$，$\therefore\frac{EP}{PC}=\frac{OE}{FC}$，即 $\frac{x}{\frac{3}{2}y-x}=\frac{y}{6-y}$，$\therefore y^2=4x$.

$Q(x_0,y_0)$，则 $y_0^2=4x_0$，$\overrightarrow{AQ}=(x_0-1,y_0)$，$\overrightarrow{AO}=(-1,0)$

$\therefore\cos\angle OAQ=\frac{1-x_0}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}\cdot 1}=\frac{1-x_0}{x_0+1}=-\frac{1}{2}$，$\therefore x_0=3$，$\therefore AQ=4$，选 A.



8．已知 $f(x)$ 是定义域为 **R** 的偶函数，$f(5.5)=2$，$g(x)=(x-1)f(x)$．若 $g(x+1)$ 是偶函数，则 $g(-0.5)=$

A．-3　　　B．-2　　　C．2　　　D．3

【答案】D

$g(x+1)$为偶函数，则$g(x)$关于$x=1$对称，即$g(x)=g(2-x)$

即$(x-1)f(x)=(1-x)f(2-x)$，即$f(x)+f(2-x)=0$，

$\therefore f(x)$关于$(1,0)$对称，又$f(x)=-f(2-x)=-f(x-2)$，

$\therefore f(x)$周期为4，$f(5.5)=f(1.5)=f(-2.5)=f(2.5)=2$，

$\therefore g(-0.5)=g(2.5)=1.5f(2.5)=3$.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．已知一组数据x_1，x_2，…，x_n的平均数x_0，若在这组数据中添加一个数据x_0，得到一组新数据x_0，x_1，x_2，…，x_n，则

A．这两组数据的平均数相同　　B．这两组数据的中位数相同

C．这两组数据的标准差相同　　D．这两组数据的极差相同

【答案】AD

【解析】$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x_0$，$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=nx_0$，

$\dfrac{x_0+x_1+\cdots+x_n}{n+1}=\dfrac{x_0+nx_0}{n+1}=x_0$，$\therefore$平均数不变，A对.

取一组数据$1,2,3,11,14,15$，中位数为7，平均数为$\dfrac{23}{3}$，

加上一个$\dfrac{23}{3}$，中位数为$\dfrac{23}{3}\neq 7$，B错.

原来$S^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2$，后来$S_1^2=\dfrac{1}{n+1}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2+(x_0-x_0)^2\right]$

$=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2\neq S^2$，C错.

选AD.

对于D，数据不会相等时，x_0既不是最大值也不是最小值，极差不变，数据会相等时，极差为0，加上x_0，极差仍为0，极差不变.

10．若 $a>b>0>c$，则

A．$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$　　　　B．$\frac{b-c}{a-c}>\frac{b}{a}$

C．$a^c>b^c$　　　　D．$a-c>2\sqrt{-bc}$

【答案】ABD

【解析】$\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=\frac{(b-a)c}{ab}$，$a>b>0>c$，$\therefore ab>0$，$b-a<0$，$c<0$，$\therefore \frac{(b-a)c}{ab}>0$，

$\therefore \frac{c}{a}>\frac{c}{b}$，A 对.

$\frac{b-c}{a-c}-\frac{b}{a}=\frac{a(b-c)-b(a-c)}{(a-c)a}=\frac{(b-a)c}{(a-c)a}$

$a-c>0$，$a>0$，$b-a<0$，$c<0$，$\therefore \frac{(b-a)c}{(a-c)a}>0$，$\therefore \frac{b-c}{a-c}>\frac{b}{a}$，B 对.

$y=x^c$，$c<0$时，y在$(0,+\infty)\searrow$，$a>b$，$\therefore a^c<b^c$，C 错.

$a-c>b-c=b+(-c)\geq 2\sqrt{-bc}$，D 对，选 ABD.

11．在正六棱锥 $P-ABCDEF$ 中，已知底面边长为 1，侧棱长为 2，则

A．$AB\perp PD$

B．共有 4 条棱所在的直线与 AB 是异面直线

C．该正六棱锥的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$

D．该正六棱锥的外接球的表面积为 $\frac{16\pi}{3}$

【答案】BCD

【解析】设底面中心为O，$PO\perp$平面$ABCDEF$，$\therefore PO\perp AB$.

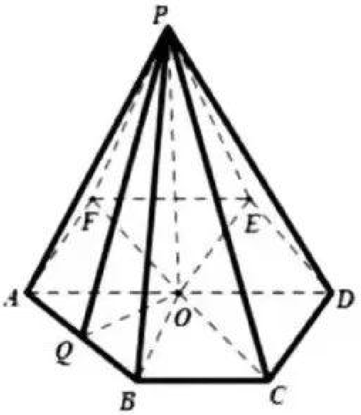
若$PD\perp AB$，则$AB\perp$平面POD，则$AB\perp OD$，即$AB\perp AD$矛盾，A 错.

AB与PC,PD,PE,PF异面，B 对.

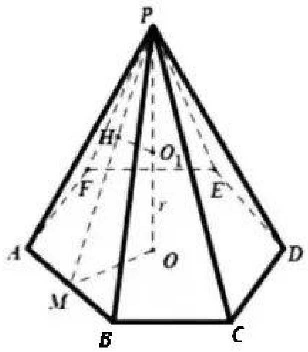
对于 C，可用几何法.

设四棱锥内切球球心为O_1，$\therefore O_1$一定在PO上，图中$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$PM=\frac{\sqrt{15}}{2}$，$PO=\sqrt{3}$，取AB中点M，连接PM,OM，



过O_1作$O_1H \perp PM$于点H，$\therefore O_1H \perp$平面PAB



只需$O_1H = O_1O = r$，由$\triangle PO_1H \backsim \triangle PMO \Rightarrow \dfrac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-r}{\frac{\sqrt{15}}{2}}$

$\Rightarrow$内切球球半径$r = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$，C 正确.

设内切圆半径为r，取AB中点Q，$PA = PB = 2$，$BQ = \dfrac{1}{2}$，$\therefore PQ = \sqrt{4-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

$\therefore S_{\triangle PAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \dfrac{\sqrt{15}}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\therefore S_{侧} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$，$S_{底} = 6\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Rt$\triangle POQ$中，$PO = \sqrt{PQ^2 - OQ^2} = \sqrt{\dfrac{15}{4}-\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot r$，$\therefore r = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$.

设外接球半径为R，则$(\sqrt{3}-R)^2 + 1 = R^2$，$\therefore R = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

$S = 4\pi R^2 = \dfrac{16}{3}\pi$，D 对，选 BCD.

12．已知直线 $y=a$ 与曲线 $y=\frac{x}{e^x}$ 相交于 A，B 两点，与曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 相交于 B，C 两点，A，B，C 的横坐标分别为 x_1，x_2，x_3，则

A．$x_2=ae^{x_2}$　　B．$x_2=\ln x_1$　　C．$x_3=e^{x_2}$　　D．$x_1x_3=x_2^2$

【答案】ACD

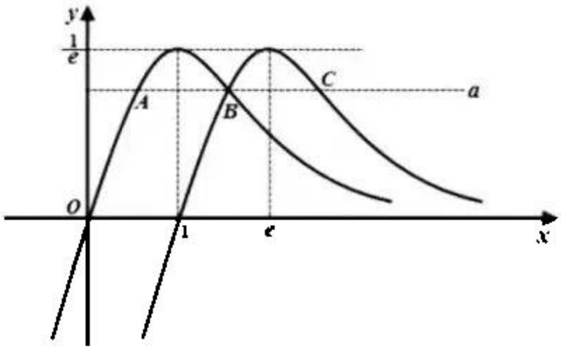
【解析】方法一：

$y=\frac{x}{e^x}$，$y'=\frac{1-x}{e^x}=0$，$x=1$.

y 在 $(-\infty,1)\nearrow$，$(1,+\infty)\searrow$，$y_{\max}=\frac{1}{e}$.

$y=\frac{\ln x}{x}$，$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，$x=e$，

y 在 $(0,e)\nearrow$，$(e,+\infty)\searrow$，$\therefore y_{\max}=\frac{1}{e}$



$\frac{x_2}{e^{x_2}}=a$，则 $x_2=ae^{x_2}$，A 对.

$\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=a=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_2}{e^{\ln x_2}}$，$y=\frac{x}{e^x}$ 在 $(0,1)\nearrow$，$0<x_1<1$，$0<\ln x_2<1$，

$\therefore x_1=\ln x_2$，B 错.

$\frac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=a=\frac{\ln x_3}{x_3}$，$y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)\searrow$，$e^{x_2}\in(e,e^e)$，$x_3>e$，$\therefore e^{x_2}=x_3$，C 对.

$x_1x_3=e^{x_2}\ln x_2=\frac{x_2}{a}\cdot ax_2=x_2^2$，D 对，选 ACD.

方法二：

求导易得 $y=\frac{x}{e^x}$ 在 $(-\infty,1)\nearrow,(1,+\infty)\searrow$，$y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)\nearrow,(e,+\infty)\searrow$，

$x_1<x_2<x_3$，且有 $a=\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_3}{x_3}$，则 $x_2=ae^{x_2}$，故 A 正确，

有 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln x_2}{x_2},(x_1<1,x_2<e)$ 可得 $\frac{\ln e^{x_1}}{e^{x_1}}=\frac{\ln x_2}{x_2},(e^{x_1}<e,x_2<e)$，由于 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)\nearrow$，

故 $x_2=e^{x_1}$，则 B 错误；

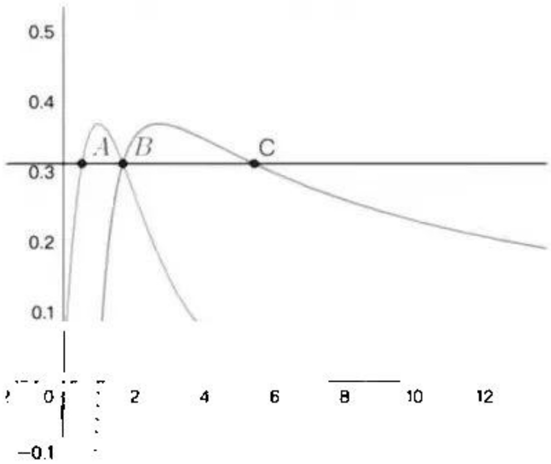
同理 $\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_3}{x_3}\ (x_2>1,x_3>e)$ 可得 $\frac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_3}{x_3},(e^{x_2}>e,x_3>e)$，

由于$y=\dfrac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)\searrow$，故$x_3=e^{x_2}$，则C正确；

因为$x_2=e^{x_1}$且$x_3=e^{x_2}$ 则$x_1x_3=e^{x_2}\ln x_2$ 又因为$\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$ 故$e^{x_2}\ln x_2=x_2^2$ 则$x_1x_3=x_2^2$，

故D正确；

综上可知ACD正确，选ACD



三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．若$\tan\theta=3\sin2\theta$，θ为锐角，则$\cos2\theta=$________.

【答案】$-\dfrac{2}{3}$

【解析】$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=6\sin\theta\cos\theta$，$\therefore\cos^2\theta=\dfrac{1}{6}$，$\sin^2\theta=\dfrac{5}{6}$，$\therefore\cos2\theta=-\dfrac{2}{3}$.

14．设函数$f(x)=\begin{cases}-e^x, & x>0,\\ x^2+2x+4, & x\leqslant0.\end{cases}$ 若$f(f(a))=4$，则$a=$________.

【答案】$\ln2$

【解析】$\because f(0)=4$，$f(-2)=4$，$\therefore f(a)=0$或$f(a)=-2$，$f(a)=0$无解.

$f(a)=-2$时，$a=\ln2$.

15．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$，$F_2$，$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$是双曲线右支上的两点，$x_1+y_1=x_2+y_2=3$．记$\triangle PQF_1$，$\triangle PQF_2$的周长分别为$C_1$，$C_2$，若$C_1-C_2=8$，则双曲线的右顶点到直线$PQ$的距离为________.

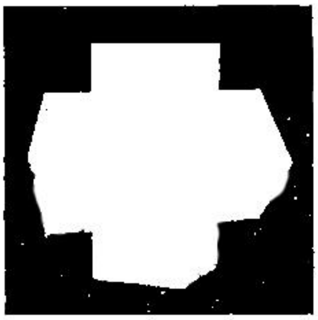
【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】$C_1-C_2=(PQ+PF_1+QF_1)-(PQ+PF_2+QF_2)=4a=8$，$\therefore a=2$.

双曲线右顶点$(2,0)$，P在$x+y=3$上，Q在$x+y=3$上，$\therefore PQ:x+y-3=0$，

$d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16．某同学的通用技术作品如图所示，该作品由两个相同的正四棱柱制作而成．已知正四棱柱的底面边长为3cm，这两个正四棱柱的公共部分构成的多面体的面数为________，体积为________cm^3．（第一空2分，第二空3分）



【答案】八；$18\sqrt{2}$

【解析】方法一：

公共部分是两个正四棱锥且底面重叠的空间几何体，共八面.

底面是$3\sqrt{2}$为边长的正方形，$S=18$，其中一个正四棱锥的高为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore V=\frac{1}{3}\cdot 18\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times 2=18\sqrt{2}$.

方法二：

公共部分如图：

面数为8，且两个正四棱锥高均为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，底面边长为$3\sqrt{2}$，

$\therefore V=\frac{1}{3}\times 18\times 3\sqrt{2}=18\sqrt{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题 10 分)

在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\sin A=2\sin B$.

(1)若 $b=2$，$c=2\sqrt{7}$，求 C；

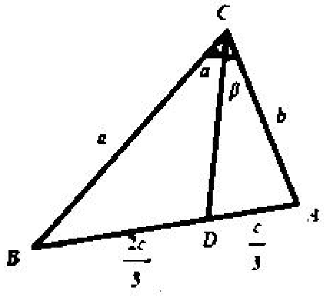
(2)点 D 在边 AB 上，且 $AD=\frac{1}{3}c$，证明：CD 平分$\angle ACB$.

【解析】

(1) 由$\sin A=2\sin B\Rightarrow a=2b$，$\because b=2$，$\therefore a=4$，

$\therefore \cos C=\dfrac{16+4-28}{2\times 4\times 2}=-\dfrac{1}{2}$，$C=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) 在$\triangle BCD$中，由正弦定理$\Rightarrow \dfrac{\frac{2}{3}c}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin\angle BDC}$，①



在$\triangle ACD$中，由正弦定理$\Rightarrow \dfrac{\frac{1}{3}c}{\sin\beta}=\dfrac{b}{\sin\angle ADC}$，②

$\because \sin\angle BDC=\sin\angle ADC$，$a=2b$，$\therefore \dfrac{①}{②}\Rightarrow \sin\alpha=\sin\beta$

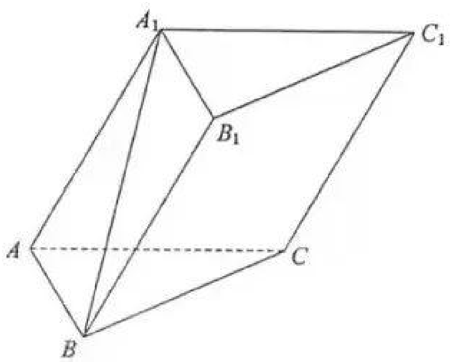
$\therefore \alpha=\beta$，即 CD 平分$\angle ACB$.

18. (本题 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 2，$\angle A_1AC=60°$，$A_1B=\sqrt{6}$.

(1)证明：平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC；

(2)求二面角 $B-A_1B_1-C_1$ 的正弦值.



【解析】

（1）证明：取AC中点M，连接A_1M, BM，$\because$三棱柱所有棱长均相等，

且$\angle A_1AC=60^\circ$，$\therefore A_1M\perp AC$，$BM\perp AC$且$A_1M=BM=\sqrt{3}$，

$\therefore A_1M^2+BM^2=A_1B^2$，$\therefore A_1M\perp BM$，

又$\because AC\cap BM=M$，$\therefore A_1M\perp$平面ABC.

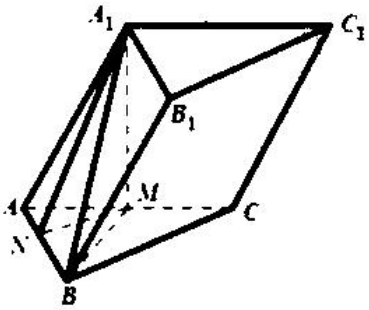
又$\because A_1M\subset$平面A_1ACC_1，$\therefore$平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC.

（2）等价于求A_1-AB-C的二面角的正弦值.

$\because A_1M\perp$平面ABC，过M作$MN\perp AB$于点N，连接A_1N，

$\therefore \angle A_1NM$即为所求二面角，A_1-AB-C的平面角，

$AM=\sqrt{3}$，$MN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore A_1N=\sqrt{3+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$\therefore \sin\angle A_1NM=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



19.（本题12分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_n+S_n=-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(1)从下面两个结论中选择一个进行证明，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

①数列$\{2^na_n\}$是等差数列；

②数列$\{a_n-\dfrac{n}{2^n}\}$是等比数列；

（注：如果选择多个方案进行解答，按第一个方案解答计分.）

(2)记$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【解析】

（1）若选①，$a_n+S_n=-\frac{1}{2^{n-1}}$（1），$a_{n+1}+S_{n+1}=-\frac{1}{2^n}$（2）

$(2)-(1)\Rightarrow a_{n+1}-a_n+a_{n+1}=\frac{1}{2^n}$，即$2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^n}$.

$\therefore 2^{n+1}a_{n+1}-2^n a_n=1$且$a_1=-\frac{1}{2}$，$\therefore\{2^n a_n\}$是首项为$-1$，公差为1的等差数列.

$2^n a_n=-1+(n-1)\cdot 1=n-2\Rightarrow a_n=\frac{n-2}{2^n}$.

若选②，由$2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^n}\Rightarrow 2a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)-2n}{2^{n+1}}$

$\therefore 2\left(a_{n+1}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)=a_n-\frac{n}{2^n}$，且$a_1-\frac{1}{2}=-1\neq 0$，

$\therefore\left\{a_n-\frac{n}{2^n}\right\}$是等比数列且首项为$-1$，公比为$\frac{1}{2}$.

$\therefore a_n-\frac{n}{2^n}=(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{n-2}{2^n}$.

（2）$S_n=-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-2}{2^n}=-\frac{n}{2^n}$，$\therefore b_n=\frac{\frac{n-1}{2^{n+1}}}{-\frac{n}{2^n}\cdot\left(-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)}=\frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}$

$\therefore T_n=\frac{2^2}{2}-\frac{2}{1}+\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}=\frac{2^{n+1}}{n+1}-2$

20.（本题12分）

某地举行象棋比赛，淘汰赛阶段的比赛规则是：两人一组，先胜一局者进入复赛，败者淘汰.比赛双方首先进行一局慢棋比赛，若和棋，则加赛快棋；若连续两局快棋都是和棋，则再加赛一局超快棋，超快棋只有胜与负两种结果.在甲与乙的比赛中，甲慢棋比赛胜与和的概率分别为$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，快棋比赛胜与和的概率均为$\frac{1}{3}$，超快棋比赛胜的概率为$\frac{1}{4}$，且各局比赛相互独立.

(1)求甲恰好经过三局进入复赛的概率；

(2)记淘汰赛阶段甲与乙比赛的局数为X，求X的概率分布列和数学期望.

【解析】

（1）前两局和棋最后一局甲胜，$P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$.

（2）X 的所有可能取值为1,2,3,4，乙慢棋比赛胜概率 $P=\frac{1}{6}$，乙快棋比赛胜概率 $P=\frac{1}{3}$，

乙超快棋比赛胜概率 $P=\frac{3}{4}$.

$P(X=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$，

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}$，$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$.

$\therefore X$ 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

$\therefore E(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{27}+4\times\frac{1}{27}=\frac{40}{27}$.

21.（本题 12 分）

已知曲线 C 由 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0，x\geq0)$和 C_2：$x^2+y^2=b^2(x<0)$两部分组成，C_1 所在椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，上、下顶点分别为 B_1，B_2，右焦点为 F，C_2 与 x 轴相交于点 D，四边形 B_1FB_2D 的面积为$\sqrt{3}+1$.

(1)求 a，b 的值；

(2)若直线 l 与 C_1 相交于 A，B 两点，$|AB|=2$，点 P 在 C_2 上，求△PAB 面积的最大值.

【解析】方法一：

（1）由题意知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}(b+c)\cdot 2b=\sqrt{3}+1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$.

（2）①当 AB 斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，由对称性，不妨设 $k>0$

$\begin{cases}y=kx+m\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow x^2+4(k^2x^2+2kmx+m^2)=4$，$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。