2020 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅰ卷　文科数学　参考答案

本试卷防伪处为：

则下列函数中满足条件

求实数 a 的取值范围

1. D 【解析】$z=\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，故复数 z 在复平面内对应点为 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，故在第四象限.

2. D 【解析】由题意知集合 C 中元素在集合 A 中或在集合 B 中的有 1，3，4，7，故 $(A\cup B)\cap C=\{1,3,4,7\}$.

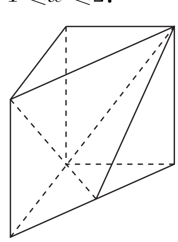
3. A 【解析】$\mathrm{e}^a+2b>\mathrm{e}^b+2a\Leftrightarrow \mathrm{e}^a-2a>\mathrm{e}^b-2b$，令 $f(x)=\mathrm{e}^x-2x(x>0)$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-2$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln 2$，故 $f(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，故当 $a>b>1$ 时，$f(a)>f(b)$，故“$a>b>1$”是“$\mathrm{e}^a+2b>\mathrm{e}^b+2a$”的充分条件；但当 $0<a<b<\ln 2$ 时，有 $f(a)>f(b)$，故“$a>b>1$”是“$\mathrm{e}^a+2b>\mathrm{e}^b+2a$”的不必要条件.

4. C 【解析】A 选项为偶函数，不符合题意；B 选项虽然为奇函数，但 $x>0$ 时 $f(x)\geqslant 2$，故 $f(x)=x+\frac{1}{x}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，不符合题意；C 选项 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)=-x^{\frac{1}{3}}$ 为奇函数，值域为 $\mathbf{R}$，图象也经过第四象限，符合题意；D 选项，$f(x)=\sin x\in[-1,1]$，不符合题意.

5. A 【解析】由题意知 $\cos\theta=\sin\alpha$，$\sin\theta=\cos\alpha$，$\sin(\theta-\alpha)=\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$.

6. B 【解析】因为 $f(-1)=0$，故只需求解不等式 $f(2x-3)\geqslant 0$ 即可，由图易知，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，故令 $-1\leqslant 2x-3\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 2$.

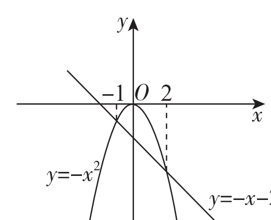
7. C 【解析】该几何体为一个直三棱柱削去两个三棱锥，故体积为 $V=\frac{1}{2}\times2\times2\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=2$.



8. C 【解析】由 $f(-x)=f(x)$ 知 $f(x)$ 为偶函数，故排除 A，D；$f(\frac{3\pi}{2})=-\frac{3\pi}{2}+\frac{4}{9\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}=\frac{7-54\pi^3}{36\pi^2}<0$.

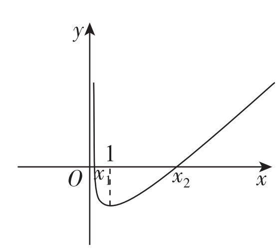
9. A 【解析】由 $\sin(2\alpha+\beta)=3\sin\beta$ 得 $\sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta=3\sin\beta$，两边同时除以 $\cos\beta$ 得 $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\tan\beta=3\tan\beta$，即 $\frac{1}{\tan\beta}=\frac{3-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha}=2\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$，所以 $\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan\alpha}=2\tan\alpha$，故 $\lambda=2$.

10. C 【解析】如图，当 $x_1\in[-2,0]$ 时，$f(x_1)_{\max}=f(-1)=-1$；当 $x_2\in[1,2]$ 时，$g(x_2)$ 为增函数，则 $g(x_2)_{\max}=g(2)=6+m$. 由题意知 $f(x_1)_{\max}\leqslant g(x_2)_{\max}$，即 $-1\leqslant 6+m$，即 $m\geqslant -7$.



11. C 【解析】$f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{4})$，$g(x)=f(x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}\sin(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\varphi-\frac{\pi}{4})$，因为 $g(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$. 由 $x=\frac{\pi}{3}$ 为 $g(x)$ 的一条对称轴，则 $\varphi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，故 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{7\pi}{6})$. 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{7\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi$.

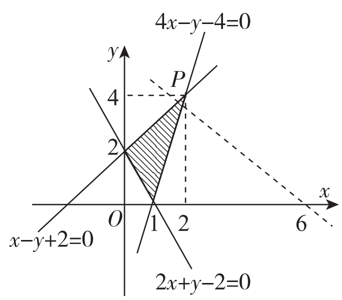
12. D 【解析】$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，如图，故 $f(x)_{\min}=f(1)=1+m<0$，即 $m<-1$，并且 $0<x_1<1$，故 A、C 正确；由于 x_1，x_2 为 $f(x)$ 的零点，故有 $\begin{cases}x_1-\ln x_1+m=0\\x_2-\ln x_2+m=0\end{cases}$，两



式相减得 $x_1-x_2=\ln\frac{x_1}{x_2}$，即 $e^{x_1-x_2}=\frac{x_1}{x_2}$，故 B 正确；由于当 $m\leqslant-2+\ln 2$ 时，$x_2\geqslant 2$，此时 $x_1+x_2>2$，故 D 不正确.

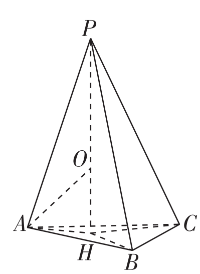
13. $2x-y-1=0$ 【解析】$f'(x)=\ln x+2$，$f'(1)=2$，$f(1)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=2(x-1)+1=2x-1$.

14. -1 【解析】如图阴影部分为可行域，直线 $mx-y-6m=0$ 恒过定点 $(6,0)$，当过点 P 时 m 取最小值 -1.



15. $a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2\times 3^{n-2}, n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ 【解析】当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=a_n$①，$2S_n=a_{n+1}$②，②－①得 $2a_n=a_{n+1}-a_n$，即 $a_{n+1}=3a_n$，故数列 $\{a_n\}$ 从第二项起为等比数列，$a_2=2$，$a_n=2\times 3^{n-2}$. 当 $n=1$ 时，$a_1=1$，故 $a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2\times 3^{n-2}, n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$.

16. $\frac{192\pi}{11}$ 【解析】如图，作 $PH\perp$ 平面 ABC，垂足为 H，连结 HA，HB，HC. 因为 $PA\perp BC$，$BC\perp PH$，所以 $BC\perp$ 平面 AHP，故 $BC\perp AH$；同理得 $AC\perp BH$，故 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 又因为 $\mathrm{Rt}\triangle AHP\cong\mathrm{Rt}\triangle BHP\cong\mathrm{Rt}\triangle CHP$，故 $AH=BH=CH$，故 H 为 $\triangle ABC$ 的外心. 故 $\triangle ABC$ 为等边三角形，因此 $2AH=\frac{2}{\sin 60°}$，解得 $AH=\frac{2}{\sqrt{3}}$，故 $PH=\sqrt{4^2-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{44}{3}}$. 设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，则 $(PH-R)^2+AH^2=R^2$，解得 $R^2=\frac{48}{11}$，故外接球表面积为 $S=4\pi\times\frac{48}{11}=\frac{192\pi}{11}$.



17. 【解析】(1) 由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $3-2k=0$，即 $k=\frac{3}{2}$；…………………………………… 3 分

(2) 由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $k+6=0$，

所以 $k=-6$. ………………………………… 6 分

设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=5+45=50$，故 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2=45$，故 $\cos\theta=\frac{45}{5\sqrt{2}\times 3\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. …… 10 分

18. 【解析】(1) 因为 $f(x)$ 为偶函数，

故先研究 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

当 $x>0$ 时，当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=|e^{-x}-\frac{1}{2}|$，

令 $f(x)=0$，解得 $x=\ln 2$，当 $0<x<\ln 2$ 时，$f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}$ 单调递减；当 $x>\ln 2$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}-e^{-x}$ 单调递增. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$，$(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(-\ln 2,0)$，$(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

……………………………………………… 5 分

(2) 由于 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

故方程 $f(x)=\frac{1}{4}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个根即可.

当 $m\leqslant 0$ 时，$f(x)=e^{-x}-m$，即 $m=e^{-x}-\frac{1}{4}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个根，由于 $y=e^{-x}-\frac{1}{4}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $y=e^{-x}-\frac{1}{4}\in(-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$，故 $-\frac{1}{4}<m\leqslant 0$；………………… 7 分

当 $0<m<1$ 时，令 $e^{-x}-m=0$，解得 $x=-\ln m$，当 $x\in(0,-\ln m)$ 时，$y=e^{-x}-m>0$；当 $x\in(-\ln m,+\infty)$ 时，$y=e^{-x}-m<0$. 故由题意知只需 $\begin{cases}1-m>\frac{1}{4}\\ m\leqslant\frac{1}{4}\\ 0<m<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m<\frac{1}{4}\\ m>\frac{1}{4}\\ 0<m<1\end{cases}$，解得 $0<m\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}<m<1$；………………………………… 9 分

当 $m\geqslant 1$ 时，$f(x)=m-e^{-x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由于此时 $f(x)\in(m-1,m)$，故只需 $m-1<\frac{1}{4}<m$，即 $1\leqslant m<\frac{5}{4}$. 综上可得，$-\frac{1}{4}<m\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}<m<\frac{5}{4}$. ………………………… 12 分

19. 【解析】(1) $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$，故 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，故 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列，首项 $\frac{1}{a_1}=1$，公差为 2，故 $\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times 2=2n-1$，故 $a_n=\frac{1}{2n-1}$；…… 5 分

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}n^2\cdot(n+1)^2}=\dfrac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$， ………………………………………… 7 分

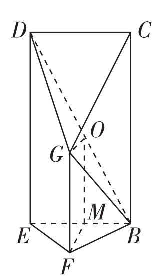
故 $S_n=(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2^2})+(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2})+\cdots+(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2})=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$，令 $1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\geqslant\dfrac{999}{1000}$，即 $\dfrac{1}{(n+1)^2}\leqslant\dfrac{1}{1000}$，即 $(n+1)^2\geqslant1000$，当 $n=30$ 时，$31^2=961<1000$；当 $n=31$ 时，$32^2=1024>1000$，故 $n\geqslant31$，因此不等式 $S_n\geqslant\dfrac{999}{1000}$ 成立的正整数 n 的最小值为 31. ………………………… 12 分

20.【解析】(1) 在 $\triangle BEM$ 中，$\dfrac{BM}{\sin(45^\circ+60^\circ)}=\dfrac{BE}{\sin45^\circ}$，$\sin(45^\circ+60^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，故 $BE=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}-1$，故 $\triangle BEM$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times1\times(\sqrt{3}-1)\sin60^\circ=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$；………… 5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，根据余弦定理得 $AC^2=1+4-2\times1\times2\times\cos60^\circ=3$，故 $BC^2=AB^2+AC^2$，因此 $\angle BAC=90^\circ$，$\angle ACB=30^\circ$. 当 $EM\perp FM$ 时，在 $\triangle BEM$ 中，$\dfrac{BM}{\sin(60^\circ+\theta)}=\dfrac{EM}{\sin60^\circ}$，即 $EM=\dfrac{\sin60^\circ}{\sin(60^\circ+\theta)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$；………………… 9 分

在 $\triangle CFM$ 中，$\angle CMF=90^\circ-\theta$，$\angle CFM=60^\circ+\theta$，$\dfrac{CM}{\sin(60^\circ+\theta)}=\dfrac{FM}{\sin30^\circ}$，即 $FM=\dfrac{\sin30^\circ}{\sin(60^\circ+\theta)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$，故 $EM=\sqrt{3}FM$. …………… 12 分

21.【解析】(1) 取 BD，BE 的中点分别为 O，M，连结 GO，OM，MF，如图.



$OM/\!/DE$ 且 $OM=\dfrac{1}{2}DE$，又因为 $GF/\!/DE$ 且 $GF=\dfrac{1}{2}DE$，所以 $GF/\!/OM$ 且 $GF=OM$，故四边形 $OGFM$ 为平行四边形，故 $GO/\!/FM$. 因为 M 为 EB 中点，三角形 BEF 为等边三角形，故 $FM\perp EB$，因为平面 $EFB\perp$ 平面 $BCDE$，故 $FM\perp$ 平面 $BCDE$，因此 $GO\perp$ 平面 $BCDE$，故平面 $GBD\perp$ 平面 $BCDE$；…………………………………………… 6 分

(2) 因为 $BE/\!/CD$，故 $BE/\!/$ 平面 CDG，故点 E 到平面 CDG 的距离等于点 B 到平面 CDG 的距离.

由(1)知三棱锥 $G-BCD$ 的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\cdot OG\cdot S_{\triangle BCD}$，$OG=FM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$，故 $V_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$；………………………………… 8 分

在 $\triangle CDG$ 中，$DG=CG=\sqrt{2}$，取 CD 中点 P，连结 GP，$GP=\sqrt{2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，故 $S_{\triangle CDG}=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，设点 B 到平面 CDG 的距离为 d，故三棱锥 $B-CDG$ 的体积 $V_2=\dfrac{1}{3}\cdot d\cdot S_{\triangle CDG}=\dfrac{\sqrt{7}}{12}d$，由于 $V_1=V_2$，则 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{7}}{12}d$，即 $d=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，故点 E 到平面 CDG 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. ………………… 12 分

22.【解析】(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x+\cos x$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$e^x\geqslant1$，故 $e^x+\cos x>0$，故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上无零点；当 $x\in[-\pi,0)$ 时，$f'(x)=e^x-\sin x$，

因为 $-\sin x\geqslant0$，$e^x>0$，故 $f'(x)>0$，

因此 $f(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上单调递增.

因为 $f(-\pi)=e^{-\pi}-1<0$，$f(0)=2>0$，

故存在唯一 $x_0\in(-\pi,0)$ 使得 $f(x_0)=0$. 综上知，$f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有一个零点； ……… 6 分

(2) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)=e^x-\sin x-a$，

①当 $a\leqslant0$ 时，因为 $e^x\geqslant1$，$-\sin x\geqslant-1$，$-a\geqslant0$，

故 $f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)\geqslant f(0)=2$，符合题意； …………… 8 分

②当 $0<a\leqslant1$ 时，令 $g(x)=e^x-\sin x-a(x\in[0,+\infty))$，$g'(x)=e^x-\cos x>1-\cos x>0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)\geqslant g(0)=1-a\geqslant0$，故 $f'(x)\geqslant0$，

因此 $f(x)\geqslant f(0)=2$，符合题意； ………… 9 分

③当 $a>1$ 时，令 $g(x)=e^x-\sin x-a(x\in[0,+\infty))$，$g(0)=1-a<0$，$g(a)=e^a-\sin a-a>e^a-1-a$，令 $h(a)=e^a-1-a(a>1)$，$h'(a)=e^a-1>0$，故 $h(a)>h(1)=e-2>0$，故 $g(a)>0$，存在 $x_0\in(0,a)$ 使得 $g(x_0)=0$，故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)<f(0)=2$，与题意矛盾，

故 $a>1$ 不符合题意.

综上，$a\leqslant1$ 符合题意. ………………………… 12 分