高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,2\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{-2,-1,0\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0\}$

2. 已知$(2-i)z=(1+i)^3$（i为虚数单位），则在复平面内z所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知$p:a>b>0$，$q:\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$，则$p$是$q$的

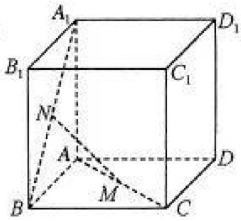
A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线互相垂直，则双曲线$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

5. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M，N分别为AC，A_1B的中点，则异面直线MN与CC_1所成角的大小为



A. 30°　　B. 90°

C. 45°　　D. 60°

6. 已知四边形$ABCD$为平行四边形，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，$\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$

A. 7　　B. 1　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

7. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n+1$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2\,022}}=$

A. $\frac{2\,021}{1\,011}$　　B. $\frac{4\,044}{2\,023}$　　C. $\frac{2\,021}{2\,022}$　　D. $\frac{2\,022}{2\,023}$

1
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

8. 地震震级是根据地震仪记录的地震波振幅来测定的，一般采用里氏震级标准. 里氏震级(M)是用距震中 100 千米处的标准地震仪所记录的地震波的最大振幅的对数值来表示的. 里氏震级的计算公式为 $M=\lg A-\lg A_0$，其中 A 是被测地震的最大振幅，A_0 是“标准地震”的振幅(使用标准地震振幅是为了修正测震仪距实际震中的距离造成的偏差). 根据该公式可知，2021 年 7 月 28 日发生在美国阿拉斯加半岛以南 91 公里处的 8.2 级地震的最大振幅约是 2021 年 8 月 4 日发生在日本本州近岸 5.3 级地震的最大振幅的(　　)倍(精确到 1). (参考数据：$10^{0.4}\approx 2.512$，$10^{0.5}\approx 3.162$，$10^{2.8}\approx 631$)

A. 794　　B. 631　　C. 316　　D. 251

9. 已知直线 $x+y-\sqrt{3}a=0$ 与圆 $C:(x+1)^2+(y-1)^2=2a^2-2a+1$ 相交于点 A,B，若 $\triangle ABC$ 是正三角形，则实数 $a=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

10. 已知函数 $f(x)=4\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 相邻两个对称轴之间的距离为 π，且 $f(x)>2$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，则 φ 的取值范围是

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$

C. $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$

11. 已知 P 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，若 C 的右焦点 F 的坐标为 $(3,0)$，点 M 满足 $|\overrightarrow{FM}|=1$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{FM}=0$，若 $|\overrightarrow{PM}|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，则椭圆 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$　　B. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$　　D. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

12. 函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值，则实数 a 的取值范围是

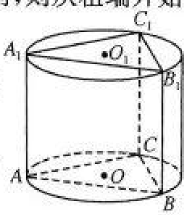
A. $(-\infty,e)$　　B. $(0,e)$

C. $(e,+\infty)$　　D. $[e,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,\lambda)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则实数 λ 的值为________.

14.《九章算术》有如下问题：“今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤；斩末一尺，重二斤. 问次一尺各重几何?”意思是：“现在有一根金箠，长五尺，在粗的一端截下一尺，重 4 斤；在细的一端截下一尺，重 2 斤. 问各尺依次重多少?”按这一问题的题设，假设金箠由粗到细各尺重量依次成等差数列，则从粗端开始的第二尺的重量是________斤.



15. 已知函数 $f(x)=x^2-2$，$g(x)=3\ln x-ax$，若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在公共点处的切线相同，则实数 $a=$________.

16. 如图，棱长均相等的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面均内接于圆柱 OO_1 的上、下底面，则圆柱 OO_1 的侧面积与其外接球的表面积之比为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $5\sin B\sin C-3=5\cos B\cos C+\cos 2A$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=\sqrt{3}$，求 $2b+c$ 的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

某社区为庆祝中国共产党成立 100 周年，举办一系列活动，通过调查得知其中参加文艺活动与体育活动的居民人数如下表：

	男性	女性	合计
文艺活动	15	30	
体育活动	20	10	
合计			

(1)补全上表，并判断能否在犯错误的概率不超过 0.5%的前提下认为参加活动类型与性别有关？

(2)在参加活动的男性居民中，用分层抽样方法抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 2 人接受采访，求接受采访的 2 人来自参加文艺活动和体育活动各一人的概率.

附：

$P(K^2\geq k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

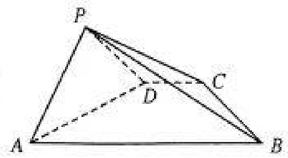
$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB/\!/DC$，$PA=PD$，$\angle BAD=45°$，$AD=2\sqrt{2}$，$AB=4$，$DC=1$，$PB=2\sqrt{3}$.

(1)求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

(2)在线段 PB 上是否存在点 M，使得 $CM/\!/$平面 PAD？若存在，求 $\dfrac{BM}{BP}$ 的值；若不存在，请说明理由.



20.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,直线 $l:y=k(x+m)(k\neq 0)$ 交抛物线 E 于 A,B 两点,当直线 l 过点 F 时,点 A,B 到 E 的准线的距离之和为 12,线段 AB 的中点到 y 轴的距离是 4.

(1)求抛物线 E 的方程;

(2)当 $m=-1$ 时,设线段 AB 的中点为 M,在 x 轴上是否存在点 N,使得 $|MN|^2-\frac{1}{4}|AB|^2$ 为定值?若存在,求出该定值;若不存在,说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-(x+a)^2(a\in\mathbf{R})$,若 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1,x_2.

(1)求实数 a 的取值范围;

(2)求证:$x_1+x_2>2-2a$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l_1 与曲线 C 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta=2$,$\rho=4\sin\theta$,点 P 的极坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求直线 l_1 以及曲线 C 的直角坐标方程;

(2)在极坐标系中,已知射线 $l_2:\theta=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 与 l_1,C 的公共点分别为 A,B,且 $|OA|\cdot|OB|=16+8\sqrt{3}$,求△$POB$ 的面积.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知函数 $f(x)=3|x+a|+|x-1|(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求不等式 $f(x)<9$ 的解集;

(2)若不等式 $f(x)\geqslant 3x-2$ 对 $\forall x\in[1,3]$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

4
官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

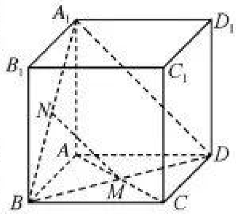
高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 $\complement_U B=\{-2,-1,0\}$，所以 $A\cap(\complement_U B)=\{-1,0\}$. 故选 D.

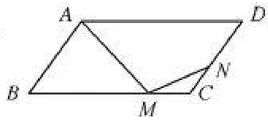
2. A　因为 $(2+i)z=(1+i)^2$，所以 $z=\frac{2i}{2+i}=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$，所以在复平面内 z 对应的点为 $\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$，位于第一象限. 故选 A.

3. B　因为 $a>b>0$，所以 $0<a-b<a$，所以 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$，充分性成立；若 $a=-4,b=-5$，则 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$，但不满足 $a>b>0$，必要性不成立，因此 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 B.

4. A　双曲线 C 的两条渐近线方程分别为 $y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$，由题意得 $\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$，即 $\frac{b^2}{a^2}=1$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$. 故选 A.



5. C　如图，在正方体中，连接 BD 交 AC 于 M，连接 A_1D，因为 M,N 分别为 BD,A_1B 的中点，所以 $MN/\!/A_1D$，所以异面直线 MN 与 CC_1 所成角即 A_1D 与 DD_1 所成角，易知 $\angle A_1DD_1=45^\circ$. 故选 C.



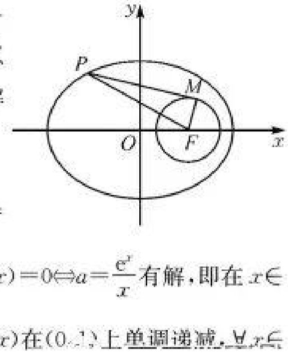
6. D　$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{16}\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{3}\times3-\frac{3}{16}\times4=\frac{1}{4}$. 故选 D.

7. B　因为 $a_{n+1}-a_n=n+1$，故可得 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，…，$a_n-a_{n-1}=n$，累加可得 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n$，又因为 $a_1=1$，则 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2022}}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,022}-\frac{1}{2\,023}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{2\,023}\right)=\frac{4\,044}{2\,023}$. 故选 B.

8. A　由题意 $M=\lg A-\lg A_0=\lg\frac{A}{A_0}$，即 $\frac{A}{A_0}=10^M$，则 $A=A_0\cdot10^M$. 当 $M=8.2$ 时，地震的最大振幅 $A_1=A_0\cdot10^{8.2}$；当 $M=5.3$ 时，地震的最大振幅 $A_2=A_0\cdot10^{5.3}$，所以 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_0\cdot10^{8.2}}{A_0\cdot10^{5.3}}=10^{2.9}=10^{0.4}\times10^{0.5}\times10^2\approx2.512\times3.162\times100\approx794$，即 $A_1=794A_2$. 故选 A.

9. D　由题意得，圆的圆心坐标 $C(-1,1)$，所以 C 到直线 $x+y-\sqrt{3}a=0$ 的距离 $d=\frac{|-1+1-\sqrt{3}a|}{\sqrt{1+1}}=\left|\frac{\sqrt{6}a}{2}\right|$，又 $\triangle ABC$ 是正三角形，所以 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，即 $\left|\frac{\sqrt{6}a}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2a^2-2a+1}$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 故选 D.

10. C　由题意，得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，解得 $\omega=1$. 由 $4\sin(x+\varphi)>2$，即 $\sin(x+\varphi)>\frac{1}{2}$，得 $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x+\varphi<\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，即 $x\in\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi-\varphi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi-\varphi\right)(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $f(x)>2$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，且 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{6}-\varphi,\frac{5\pi}{6}-\varphi\right)$，即 $\begin{cases}\frac{\pi}{6}-\varphi\leqslant-\frac{\pi}{4},\\ \frac{5\pi}{6}-\varphi\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$ 解得 $\frac{5\pi}{12}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 故选 C.



11. B　设 C 的半焦距为 c，则 $c=3$，如图，$\because\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{FM}=0$，$\therefore\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{FM}$. $\therefore|PM|^2=|FP|^2-|FM|^2$. $\because|FM|=1$，$\therefore|PM|^2=|FP|^2-1$. $\therefore|FP|$ 越小，$|PM|$ 越小. 结合图形知，当 P 点为椭圆的右顶点时，$|FP|$ 取最小值 $a-c=a-3$，$\therefore|PM|$ 最小值是 $\sqrt{(a-3)^2-1}=2\sqrt{2}$，解得 $a=6$，所以 $b^2=a^2-9=27$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. 故选 B.

12. C　由 $f(x)=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$，得 $f'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-a\left(1-\frac{1}{x}\right)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{e^x}{x}-a\right)$. 因函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值，则 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=0\Leftrightarrow a=\frac{e^x}{x}$ 有解，即在 $x\in(0,1)$ 时，函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 的图象与直线 $y=a$ 有公共点. 而 $g'(x)=\frac{e^x}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$\forall x\in$

5
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

$(0,1)$，$g(x)>g(1)=e$，则 $a>e$，显然在函数 $y=\frac{e^x}{x}=-a$ 的零点左右两侧 $f'(x)$ 异号，所以实数 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$. 故选 C.

13. $\frac{8}{3}$　因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(3,-2)+2(-4,\lambda)=(-5,-2+2\lambda)$，$\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，所以 $3(-2+2\lambda)-(-2)\times(-5)=0$，解得 $\lambda=\frac{8}{3}$.

14. $\frac{7}{2}$　由题意知，这五尺的重量成等差数列 $\{a_n\}$，可设本端第一尺重量为首项 $a_1=4$，末端一尺重量为 $a_5=2$，则公差 $d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=-\frac{1}{2}$，所以 $a_2=a_1+d=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$（斤）.

15. 1　设函数 $f(x)=x^2-2$，$g(x)=3\ln x-ax$ 的公共点为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}f(x_0)=g(x_0),\\ f'(x_0)=g'(x_0),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0^2-2=3\ln x_0-ax_0,\\ 2x_0=\frac{3}{x_0}-a,\\ x_0>0,\end{cases}$ 则 $3\ln x_0+x_0^2-1=0$. 令 $h(x)=3\ln x+x^2-1$，易得 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以由 $3\ln x_0+x_0^2-1=0$，解得 $x_0=1$，所以 $a=1$.

16. $\frac{2\sqrt{3}}{7}$　设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长为 $2a$，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $r=\frac{2a}{2\sin 60^\circ}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$，所以圆柱 OO_1 外接球的半径 $R=\sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}a$，故外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{\sqrt{21}}{3}a\right)^2=\frac{28\pi}{3}a^2$，圆柱的侧面积为 $2\times\pi\times\frac{2a\sqrt{3}}{3}\times 2a=\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}a^2$，所以圆柱 OO_1 的侧面积与其外接球的表面积之比为 $\frac{\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}a^2}{\frac{28\pi}{3}a^2}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

17. 解：(1)由 $5\sin B\sin C=3-5\cos B\cos C+\cos 2A$，得
$2\cos^2A+5\cos(B+C)+2=0$，故 $2\cos^2A-5\cos A+2=0$，
即 $(2\cos A-1)(\cos A-2)=0$. ……………… 2分
所以 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=2$（舍去）. ……………… 3分
又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………… 5分
(2)由余弦定理 $b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$，得 $b^2+c^2-bc=3$，所以
$(2b+c)^2=3+b(5c+3b)=3+\frac{1}{7}\times 7b(5c+3b)\leqslant 3+\frac{1}{7}\times\left(\frac{7b+5c+3b}{2}\right)^2$. ……………… 8分
所以 $\frac{3}{28}(2b+c)^2\leqslant 3$，即 $2b+c\leqslant 2\sqrt{7}$， ……………… 10分
当且仅当 $4b=5c$ 时，即 $\begin{cases}b=\frac{5\sqrt{7}}{7},\\ c=\frac{4\sqrt{7}}{7}\end{cases}$ 时取等号. 故 $2b+c$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$. ……………… 12分

18. 解：(1)依题意，2×2 列联表如下：

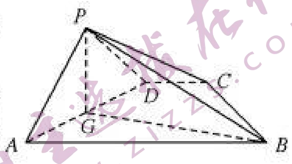
	男生	女生	合计
文艺活动	15	30	45
体育活动	20	10	30
合计	35	40	75

……………… 2分
$K^2=\frac{75\times(15\times10-30\times20)^2}{45\times30\times35\times40}=\frac{225}{28}\approx 8.036>7.879$， ……………… 4分
所以在犯错的概率不超过 0.5% 的前提下，可以认为参加活动类型与性别有关. ……………… 6分
(2)因为男性居民中参加文艺活动的有 15 名，参加体育的有 20 名，用分层抽样方法抽取 7 人，则参加文艺活动的应抽取 3 人，记为 x,y,z，参加体育活动的应抽取 4 人，记为 a,b,c,d， ……………… 7分
从这 7 人中随机选取 2 人，基本事件有
$xy,xz,xa,xb,xc,xd,yz,ya,yb,yc,yd,za,zb,zc,zd,ab,ac,ad,bc,bd,cd$ 共 21 个， ……………… [illegible]分

其中参加文艺活动和体育活动各一人的基本事件有 $xa,xb,xc,xd,ya,yb,yc,yd,za,zb,zc,zd$ 共 12 个，……… 10 分

故所求概率 $P=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$. …………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)取 AD 的中点 G，连接 PG,GB，如图所示.



在△PAD 中，$PA=PD$，G 是 AD 的中点，所以 $PG\perp AD$. ……………………………… 1 分

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PG\subset$ 平面 PAD，

所以 $PG\perp$ 平面 $ABCD$，即 PG 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高. ……………………………… 3 分

又 $GB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PG\perp GB$. ……………………………………………… 4 分

在△AGB 中，由余弦定理得 $GB^2=AG^2+AB^2-2AG\cdot AB\cdot\cos\angle GAB=$

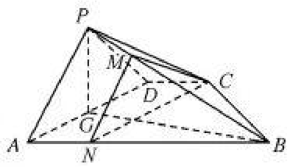
$(\sqrt{2})^2+4^2-2\times\sqrt{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$，故 $GB=\sqrt{10}$. …………………………………………………… 5 分

在△PGB 中，$PB=2\sqrt{3}$，$GB=\sqrt{10}$，$PG\perp GB$，所以 $PG=\sqrt{2}$.

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}PG\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{(1+4)\times2}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$. …………………………………………… 6 分

(2)过点 C 作 $CN\parallel AD$ 交 AB 于点 N，则 $\frac{AN}{NB}=\frac{1}{3}$.

过点 N 作 $MN\parallel AP$ 交 PB 于点 M，连接 CM，则 $\frac{PM}{MB}=\frac{1}{3}$.



又因为 $CN\parallel AD$，$AD\subset$ 平面 PAD，$CN\not\subset$ 平面 PAD，所以 $CN\parallel$ 平面 PAD. ……… 7 分

因为 $MN\parallel PA$，$PA\subset$ 平面 PAD，$MN\not\subset$ 平面 PAD，所以 $MN\parallel$ 平面 PAD. ……… 8 分

又 $CN\cap MN=N$，$CN,MN\subset$ 平面 CNM，所以平面 $PAD\parallel$ 平面 CMN.

………………………………………………………………………………………… 9 分

又 $CM\subset$ 平面 CMN，所以 $CM\parallel$ 平面 PAD. ……………………………………… 10 分

所以在 PB 上存在点 M，使得 $CM\parallel$ 平面 PAD，且 $\frac{BM}{BP}=\frac{3}{4}$. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为直线过焦点 F 时，A,B 到 E 的准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离之和为 12.

所以此时 AB 的中点到 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离为 6. ……………………………………………………… 1 分

又 AB 的中点到 x 轴的距离为 4，所以 y 轴($x=0$)与 $x=-\frac{p}{2}$ 间的距离为 2，即 $\frac{p}{2}=2$. ……………… 2 分

所以 $p=4$. ………………………………………………………………………………………… 3 分

所以抛物线 E 的方程为 $y^2=8x$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(t,0)$，

联立方程，得 $\begin{cases}y^2=8x,\\y=k(x-1)\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $k^2x^2-(2k^2+8)x+k^2=0(k\neq0)$. ……………… 6 分

$\Delta=[-(2k^2+8)]^2-4k^4=32(k^2+2)>0$，

则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+8}{k^2}=2+\frac{8}{k^2}$，$x_1x_2=1$. ……………………………………………………… 7 分

因为 M 为线段 AB 的中点，

所以 $|MN|^2-\frac{1}{4}|AB|^2=\overrightarrow{NM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{NM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$=(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MB})$ ……………………………………………………… 8 分

$=\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(x_1-t,k(x_1-1))\cdot(x_2-t,k(x_2-1))=(x_1-t)(x_2-t)+k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$=(1+k^2)x_1x_2-(t+k^2)(x_1+x_2)+t^2+k^2=1+k^2-(t+k^2)\left(2+\frac{8}{k^2}\right)+t^2+k^2=t^2-2t-7-\frac{8t}{k^2}$.

所以当 $t=0$ 时，$|MN|^2-\frac{1}{4}|AB|^2=-7$ 是定值. ………………………………………………… 11 分

所以在 x 轴上存在点 $N(0,0)$，使得 $|MN|^2-\frac{1}{4}|AB|^2$ 为定值 -7. ……………………………… 12 分

21. (1)解：$f'(x)=e^x-2x-2a$，设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-2$. ………………………………… 1 分

当 $x<\ln 2$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，

当 $x>\ln 2$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

7
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln 2)=2-2\ln 2-2a$. …………………………………………………… 2 分

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点，所以函数 $f'(x)$ 有两个零点，

所以 $2-2\ln 2-2a<0$，所以 $a>1-\ln 2>0$，…………………………………………………… 3 分

此时 $g(-a)=e^{-a}>0$，又 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上有唯一零点，即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上有唯一零点. …………………………………………………… 4 分

$g(a+2)=e^{a+2}-4a-4=e^2\cdot e^a-4a-4$.

设 $\varphi(x)=e^x-x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$.

因为 $x<0$ 时，$\varphi'(x)<0$；$x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，

所以 $\varphi(x)=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$，…………………………………………………… 5 分

所以 $e^2\cdot e^a-4a-4\geqslant e^2\cdot(a+1)-4a-4=(e^2-4)a+(e^2-4)>0$，即 $g(a+2)>0$. ……………… 6 分

又 $g(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上有唯一零点，即 $f'(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上有唯一零点.

…………………………………………………… 7 分

综上，实数 a 的取值范围是 $(1-\ln 2,+\infty)$. …………………………………………………… 8 分

(2)证明：由(1)知 x_1,x_2 是方程 $g(x)=0$ 的两根，即 $e^{x_1}=2x_1+2a$，$e^{x_2}=2x_2+2a$，不妨设 $x_1<x_2$，当 $x\in[x_1,x_2]$ 时，$g(x)=f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 是 $[x_1,x_2]$ 上的减函数，所以 $f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}-(x_1+a)^2-e^{x_2}+(x_2+a)^2$

$=(2-2a)x_1-x_1^2-(2-2a)x_2+x_2^2=(x_2-x_1)(x_1+x_2+2a-2)>0$. ………………………… 11 分

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2+2a-2>0$，即 $x_1+x_2>2-2a$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)因为 $\rho\cos\theta=2$，所以 $x=2$，

即直线 l_1 的直角坐标方程为 $x=2$. …………………………………………………… 2 分

由 $\rho=4\sin\theta$，得 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，

代入公式 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4y$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y=0$. …………………………………………………… 4 分

(2)设点 A、B 的极坐标分别为 (ρ_1,α)、(ρ_2,α)，

由题意可得 $\rho_1=\dfrac{2}{\cos\alpha}$，$\rho_2=4\sin\alpha$，…………………………………………………… 5 分

则 $|OA|\cdot|OB|=\rho_1\rho_2=8\tan\alpha=16+8\sqrt{3}$，可得 $\tan\alpha=2+\sqrt{3}$. ………………………… 6 分

因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$，

…………………………………………………… 7 分

则 $\rho_2=4\sin\alpha=\sqrt{6}+\sqrt{2}$. …………………………………………………… 8 分

因为点 P 的极坐标为 $\left(4,\dfrac{\pi}{4}\right)$，…………………………………………………… 9 分

故 $S_{\triangle POB}=\dfrac{1}{2}\times 4\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$. ………………………… 10 分

23. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=3|x+1|+|x-1|$. …………………………………………………… 1 分

当 $x\leqslant -1$ 时，不等式 $f(x)<9$ 即为 $-3(x+1)-(x-1)<9$，解得 $x>-\dfrac{11}{4}$，此时 $-\dfrac{11}{4}<x\leqslant -1$；

当 $-1<x<1$ 时，不等式 $f(x)<9$ 即为 $3(x+1)-(x-1)<9$，解得 $x<\dfrac{5}{2}$，此时 $-1<x<1$；

当 $x\geqslant 1$ 时，不等式 $f(x)<9$ 即为 $3(x+1)+(x-1)<9$，解得 $x<\dfrac{7}{4}$，此时 $1\leqslant x<\dfrac{7}{4}$.

综上所述，不等式 $f(x)<9$ 的解集为 $\left(-\dfrac{11}{4},\dfrac{7}{4}\right)$. …………………………………………………… 5 分

(2)若 $x\in[1,3]$，则 $f(x)\geqslant 3x-2$ 可化为 $3|x+a|+x-1\geqslant 3x-2$，

即 $3|x+a|\geqslant 2x-1$，…………………………………………………… 6 分

则 $3(x+a)\geqslant 2x-1$ 或 $3(x+a)\leqslant 1-2x$，

则 $x\geqslant -3a-1$ 或 $x\leqslant\dfrac{1-3a}{5}$. …………………………………………………… 7 分

对任意的 $x\in[1,3]$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 3x-2$ 恒成立，则 $-3a-1\leqslant 1$ 或 $\dfrac{1-3a}{5}\geqslant 3$，………………………… 9 分

解得 $a\geqslant -\dfrac{2}{3}$ 或 $a\leqslant -\dfrac{14}{3}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{14}{3}\right]\cup\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$. ………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。