炎德·英才大联考湖南师大附中2023届模拟试卷(一)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	B	B	C	B	D	AC	BD	ABD	ACD

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. D 【解析】方程 $x^3=x$ 的实数根有 $x=0,x=1,x=-1$,解集构成的集合为 $\{0,1,-1\}$,即 $\{0,1\}\cup X=\{0,1,-1\}$,则符合该等式的集合 X 为 $X=\{-1\},X=\{-1,1\},X=\{0,-1\},X=\{0,1,-1\}$,故这样的集合 X 共有4个.故选:D.

2. C 【解析】由 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\dfrac{\theta}{2}=2$,又 $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$.故选:C.

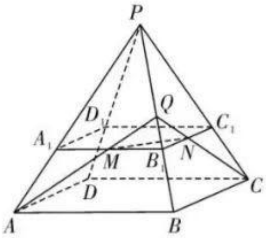
3. A 【解析】$\because f(x+1)$ 为奇函数,$\therefore f(-x+1)=-f(x+1)$,
又 $f(x)$ 为偶函数,$\therefore f(-x+1)=f(x-1)$,$\therefore f(x-1)=-f(x+1)$,
即 $f(x)=-f(x+2)$,$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为4,
由 $f(-x+1)=-f(x+1)$,令 $x=0$,易得 $f(1)=0$,$f(3)=f(-1)=f(1)=0$,
$\therefore f(0)=4$,
$\therefore \begin{cases} f(0)=k+a=4, \\ f(1)=3k+a=0, \end{cases}$ 解得 $k=-2,a=6$,
$\therefore$ 当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=-2\cdot 3^x+6$,$f(\log_3 2)=-2\times 3^{\log_3 2}+6=-2\times 2+6=2$.故选:A.

4. B 【解析】由题意知 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2022}\approx\ln 2022+\gamma$.
而 $\ln 2022=\ln(2\times3\times337)=\ln 2+\ln 3+\ln 337\approx 1.79+\ln 337$,
又 $\ln 300<\ln 337<\ln 360$,
$\ln 300=\ln 3+2\ln 10\approx 1.10+2\times 2.30=5.70$,
$\ln 360=2(\ln 2+\ln 3)+\ln 10\approx 2(0.69+1.10)+2.30=5.88$,
$\therefore \ln 2022\in(7.49,7.67)$,
$\therefore \ln 2022+\gamma\in(8.07,8.25)$,
故 $\left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2022}\right]\approx[\ln 2022+\gamma]=8$,故选:B.

5. B 【解析】首先求所有可能情况,5个人去3个地方,共有 $3^5=243$ 种情况,
再计算5个人去3个地方,且每个地方至少有一个人去,
5人被分为3,1,1或2,2,1.
当5人被分为3,1,1时,情况数为 $C_5^3\times A_3^3=60$;
当5人被分为2,2,1时,情况数为 $C_5^1\times\dfrac{C_4^2}{A_2^2}\times A_3^3=90$;
所以共有 $60+90=150$.
由于所求甲不去A,情况数较多,反向思考,求甲去A的情况数,最后用总数减即可,
当5人被分为3,1,1时,且甲去A,甲若为1,则 $C_4^3\times A_2^2=8$,甲若为3,则 $C_4^2\times A_2^2=12$,
共计 $8+12=20$ 种;
当5人被分为2,2,1时,且甲去A,甲若为1,则 $\dfrac{C_4^2}{A_2^2}\times A_2^2=6$,甲若为2,则 $C_4^1\times C_3^1\times A_2^2=24$,共计 $6+24=30$ 种,
所以甲不在A小区的概率为 $\dfrac{150-(20+30)}{243}=\dfrac{100}{243}$,故选:B.

6. C 【解析】延长 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 交于一点 P,取 PB 中点 Q,连接 AQ,CQ,如图所示:
因为正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,所以 $P-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱锥,
因为 $AB=6,A_1B_1=4,BB_1=2$,且 $\triangle PA_1B_1\backsim\triangle PAB$,
所以 $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{PB_1}{PB}$,即 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{PB_1}{PB_1+2}$,解得 $PB_1=4$,
所以 $PB=PA=AB=6$,即 $\triangle PAB$ 为等边三角形.

因为 Q 为 PB 中点，所以 $AQ\perp PB$，且 $QB=3$，同理可得 $CQ\perp PB$，



因为 $BB_1=2$，所以 $QB_1=1$，即 $\frac{QB_1}{QB}=\frac{1}{3}$，

因为 M，N 为 A_1B_1，B_1C_1 中点，所以 $MB_1=NB_1=2$，

故 $\frac{QB_1}{MB_1}=\frac{1}{2}=\frac{QB}{AB}$，$\frac{QB_1}{NB_1}=\frac{1}{2}=\frac{QB}{CB}$，

因为 $\angle QB_1M=\angle QBA$，$\angle QB_1N=\angle QBC$，

所以 $\triangle QB_1M\backsim\triangle QBA$，$\triangle QB_1N\backsim\triangle QBC$，

所以 $\angle QMB_1=\angle QAB$，$\angle QNB_1=\angle QCB$，

因为 $MB_1/\!/AB$，$NB_1/\!/CB$，

所以 M 在 AQ 上，N 在 CQ 上，

因为 $AQ\perp PB$，$CQ\perp PB$，所以 $AM\perp PB$，$CN\perp PB$，

即 $AM\perp BB_1$，$CN\perp BB_1$，因为 $AM\subset$ 平面 $AMNC$，$CN\subset$ 平面 $AMNC$，

$AM\cap CN=Q$，所以 $BB_1\perp$ 平面 $AMNC$. 故选：C.

7. B 【解析】设函数 $f(x)=2+\ln x$ 上的切点坐标为 $(x_1, 2+\ln x_1)$，且 $x_1>0$，函数 $g(x)=a\sqrt{x}$ 上的切点坐标为 $(x_2, a\sqrt{x_2})$，且 $x_2\geqslant 0$，

又 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}$，则公切线的斜率 $k=\frac{1}{x_1}=\frac{a}{2\sqrt{x_2}}$，则 $a>0$，所以 $x_2=\frac{a^2}{4}x_1^2$，

则公切线方程为 $y-(2+\ln x_1)=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1+1$，

代入 $(x_2, a\sqrt{x_2})$ 得：$a\sqrt{x_2}=\frac{1}{x_1}x_2+\ln x_1+1$，则 $\frac{a^2}{2}x_1=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{a^2}{4}x_1^2+\ln x_1+1$，整理得 $a^2=\frac{4\ln x_1+4}{x_1}$，

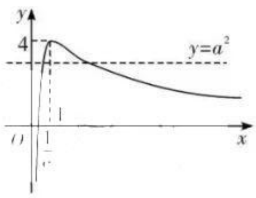
若总存在两条不同的直线与函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 图象均相切，则方程 $a^2=\frac{4\ln x_1+4}{x_1}$ 有两个不同的实根，

设 $h(x)=\frac{4\ln x+4}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{\frac{4}{x}\cdot x-(4\ln x+4)}{x^2}=\frac{-4\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$ 得 $x=1$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

又 $h(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{e}$，则 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0$，则函数 $h(x)$ 的大致图象

如图：



所以 $\begin{cases}a>0,\\0<a^2<4,\end{cases}$ 解得 $0<a<2$，故实数 a 的取值范围为 $(0,2)$. 故选：B.

8. D 【解析】由题 $\overrightarrow{A_{3k-2}A_{3k-1}}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_{3k-1}A_{3k}}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_{3k}A_{3k+1}}=(1,0)$，

$\therefore a_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2,\frac{\sqrt{3}}{2}a_1-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right)=(0,b_1)$，

又 $a_1=1$，$\therefore a_2=-1$，$b_1=\sqrt{3}$.

$\therefore a_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a_3(1,0)=\left(-\frac{1}{2}a_2+a_3,-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right)=(0,b_2)$，$\therefore a_3=-\frac{1}{2}$，$b_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

同理：

$a_4=-1$，$b_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；$a_5=1$，$b_4=-\sqrt{3}$；$a_6=\frac{1}{2}$，$b_5=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；$a_7=1$，$b_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$；$a_8=-1$，$b_7=\sqrt{3}$；$a_9=-\frac{1}{2}$，

$b_8=\frac{\sqrt{3}}{2}$，…

即数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均是周期为 6 的数列，而 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$，$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=0$，

$\therefore S_{60}+2T_{60}=0$. 故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. AC

10. BD 【解析】$P(A_1)=\frac{4}{9}$，$P(A_2)=\frac{2}{9}$，$P(A_3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

先 A_1 发生，则乙箱中有 4 个红球 3 个白球 3 个黑球，$P(B|A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，

先 A_2 发生，则乙箱中有 3 个红球 4 个白球 3 个黑球，$P(B|A_2)=\frac{3}{10}$，

先 A_3 发生，则乙箱中有 3 个红球 3 个白球 4 个黑球，$P(B|A_3)=\frac{3}{10}$.

$P(A_1B)=P(B|A_1)P(A_1)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$，B 对.

$P(A_2B)=P(B|A_2)P(A_2)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$，

$P(A_3B)=P(B|A_3)P(A_3)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$，

$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)=\frac{31}{90}\neq\frac{1}{3}$，C 错.

$P(A_1)P(B)\neq P(A_1B)$，A 错.

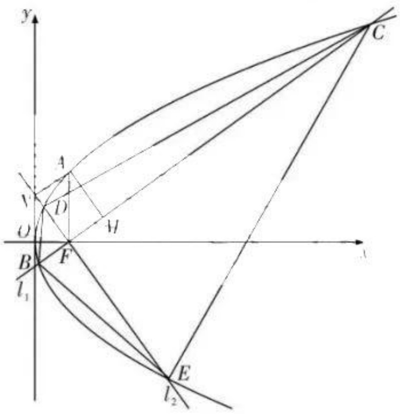
$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{31}{90}}=\frac{6}{31}$，D 对. 故选：BD.

11. ABD 【解析】依题意，$2^2=2p$，解得 $p=2$，即抛物线 $W:y^2=4x$，焦点 $F(1,0)$，准线方程为：$x=-1$，直线 l_1,l_2 与坐标轴不垂直，因为 $l_1\perp l_2$，$AM\perp l_1$，$AN\perp l_2$，则四边形 $AMFN$ 为矩形，有 $4=|AF|^2=|MF|^2+|MA|^2\geqslant 2|MF|\cdot|MA|$，

当且仅当 $|MF|=|MA|=\sqrt{2}$ 时取等号，$S_{AMFN}=|MF|\cdot|MA|\leqslant 2$，即四边形 $AMFN$ 面积的最大值为 2，A 正确；

因为 $(|MF|+|MA|)^2=2(|MF|^2+|MA|^2)-(|MF|-|MA|)^2\leqslant 8$，则 $|MF|+|MA|\leqslant 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $|MF|=|MA|=\sqrt{2}$ 时取等号，因此四边形 $AMFN$ 周长 $2(|MF|+|MA|)$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$，B 正确；



设直线 l_1 方程为：$x=ty+1$，$t\neq 0$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=ty+1,\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 x 得：$y^2-4ty-4=0$，则 $y_1+y_2=4t$，

$|BC|=|BF|+|CF|=x_1+1+x_2+1=t(y_1+y_2)+4=4(t^2+1)$，同理 $|DE|=4\left(\frac{1}{t^2}+1\right)$.

因此 $\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}=\frac{1}{4(t^2+1)}+\frac{1}{4\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}=\frac{1}{4(t^2+1)}+\frac{t^2}{4(t^2+1)}=\frac{1}{4}$，C 错误；

四边形 $BDCE$ 面积 $S_{BDCE}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|DE|=8(t^2+1)\left(\frac{1}{t^2}+1\right)=8\left(2+t^2+\frac{1}{t^2}\right)\geqslant 8\left(2+2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{t^2}}\right)=32$，

当且仅当 $t=\pm 1$ 时取等号，所以四边形 $BDCE$ 面积的最小值为 32，D 正确.

故选：ABD.

12. ACD 【解析】对选项 A：如图 1，设截面为 SMN，Q 为 MN 中点，连接 OQ，SQ，设 $MN=2a$，$a\in(0,\sqrt{3}]$，则 $S_{\triangle SMN}=\frac{1}{2}MN\times SQ$

$=a\cdot\sqrt{4-a^2}\leqslant\frac{a^2+4-a^2}{2}=2$，当 $a=\sqrt{4-a^2}$，即 $a=\sqrt{2}$ 时等号成立，A 正确；

对选项 B：如图 2，$\triangle SAB$ 中，$SA=SB=2$，$0<AB<2\sqrt{3}$，则当 $AB=2$ 时，$\angle SAB=\frac{\pi}{3}$，B 错误；

对选项 C：如图 3，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AB=BC=\sqrt{6}$，将 $\triangle SAB$ 放平得到 $\triangle S_1AB$，当 S_1,E,C 三点共线时 $SE+CE$ 最小，

F 为 AB 中点，连接 S_1F，则 $S_1F\perp AB$，$\sin\angle ABS_1=\frac{S_1F}{S_1B}=\frac{\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，$S_1C=\sqrt{BS_1^2+BC^2-2BS_1\cdot BC\cos\angle S_1BC}=$

$\sqrt{4+6-2\times2\times\sqrt{6}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle ABS_1\right)}=\sqrt{10+2\sqrt{15}}$，C 正确；

对选项 D：由 $\sin 2\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，可解得 $\tan\theta=\sqrt{2}$ 或者 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，而 $\tan\angle ASO=\sqrt{3}>\tan\theta$，

所以 $\angle ASO>\theta$，从而该圆锥侧面与平面 α 的交线必为双曲线的一部分，D 正确．

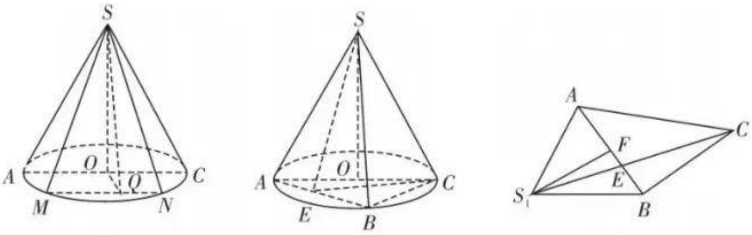


图1　　图2　　图3

故选：ACD．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．60　【解析】由题知 $a=C_{2m}^{m}$，$b=C_{13}^{6}$，$\therefore 13C_{2m}^{m}=7C_{13}^{6}$，即 $\frac{13\times(2m)!}{m!\ m!}=\frac{7\times13!}{6!\ \times7!}$，解得 $m=6$，而 $(x^2+x+y)^6=[(x^2+x)+y]^6$，又含 y^2 的项为 $C_6^2(x^2+x)^4y^2$，又 $(x^2+x)^4=x^4(x+1)^4$，含 x^7 的项为 $4x^7$，故 x^7y^2 的系数为：$4C_6^2=60$．

14．190　【解析】设对正整数 n 按照上述变换，得到数列：$a_1,a_2,\cdots,a_7,a_8$，则：

$$a_8=1\Rightarrow a_7=2\Rightarrow a_6=4\Rightarrow\begin{cases}a_5=8\Rightarrow a_4=16\Rightarrow\begin{cases}a_3=32\Rightarrow a_2=64\Rightarrow\begin{cases}a_1=128,\\a_1=21,\end{cases}\\a_3=5\Rightarrow a_2=10\Rightarrow\begin{cases}a_1=20,\\a_1=3,\end{cases}\end{cases}\\a_5=1\Rightarrow a_4=2\Rightarrow a_3=4\Rightarrow\begin{cases}a_2=1\Rightarrow a_1=2,\\a_2=8\Rightarrow a_1=16.\end{cases}\end{cases}$$

则 n 的所有可能取值为 2，3，16，20，21，128，共 6 个，其和为：190．

15．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　【解析】设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$，双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2,b_2>0)$，

且设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，

由椭圆的定义得 $m+n=2a_1$　①，

由双曲线的定义得 $|m-n|=2a_2$　②，

①^2+②^2 得，$m^2+n^2=2(a_1^2+a_2^2)$，

①^2−②^2 得，$mn=a_1^2-a_2^2$，

由余弦定理可得 $(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $a_1^2+3a_2^2=4c^2$　③，

设 $a_1=2c\cos\theta$，$a_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin\theta$，

所以 $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{a_1}{c}+\frac{a_2}{c}=2\cos\theta+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，

当 $\theta+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 即 $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 时，$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$ 取最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

16．$\left(\frac{1}{e},1\right)$　【解析】$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex$，

因为 x_1，x_2 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上递减，在 (x_1,x_2) 上递增，

所以当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$．

若 $a>1$ 时，

当 $x<0$ 时，$2\ln a\cdot a^x>0$，$2ex<0$，则此时 $f'(x)>0$，与前面矛盾，故 $a>1$ 不符合题意；

若 $0<a<1$ 时，

则方程 $2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1，x_2，即方程 $\ln a\cdot a^x=ex$ 的两个根为 x_1，x_2，

即函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点.

令 $g(x)=\ln a\cdot a^x$，则 $g'(x)=\ln^2 a\cdot a^x$，$0<a<1$，

设过原点且与函数 $y=g(x)$ 的图象相切的直线的切点为 $(x_0,\ln a\cdot a^{x_0})$，

则切线的斜率为 $g'(x_0)=\ln^2 a\cdot a^{x_0}$，故切线方程为 $y-\ln a\cdot a^{x_0}=\ln^2 a\cdot a^{x_0}(x-x_0)$，

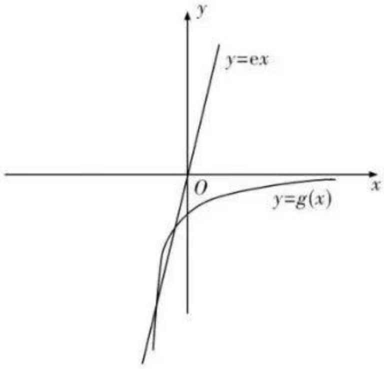
则有 $-\ln a\cdot a^{x_0}=-x_0\ln^2 a\cdot a^{x_0}$，解得 $x_0=\frac{1}{\ln a}$，

则切线的斜率为 $\ln^2 a\cdot a^{\frac{1}{\ln a}}=e\ln^2 a$，

因为函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点，

所以 $e\ln^2 a<e$，解得 $\frac{1}{e}<a<e$，又 $0<a<1$，所以 $\frac{1}{e}<a<1$，

综上所述，a 的范围为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 由正弦定理，$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A-\sin C}{\sin A-\sin B}=\frac{a-c}{a-b}$，可得 $b^2=a^2+c^2-ac$， ………… 1 分

再由余弦定理，$\cos B=\frac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………… 3 分

因为 $2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$，所以 $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$. ………… 5 分

(2) 由(1)可知：$a^2+c^2-ac=49$，则 $(a+c)^2=49+3ac$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$，

[illegible] $49}=\frac{1}{\sqrt{3}}(a+c-7)$. ………… 6 分

在△ABC 中，由正弦定理，

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$，所以 $a=\frac{14\sqrt{3}}{3}\sin A$，[illegible] $\sin C$. ………… 7 分

则 $a+c=\frac{14\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)=\frac{14\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]$

$=\frac{14\sqrt{3}}{3}\left(\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$

$=\frac{14\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=14\left(\sin A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos A\cdot\frac{1}{2}\right)=14\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$， ………… 8 分

又 $A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，

$14\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in(7,14]$，所以 $r\in\left(0,\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$. ………… 10 分

18.【解析】(1) 取 AD 中点 O，连接 OB，OP.

∵△PAD 为等边三角形，∴$OP\perp AD$，$OA=1$，$OP=\sqrt{3}$.

又∵平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$OP\subset$ 平面 PAD，∴$OP\perp$ 平面 $ABCD$.

又∵$OB\subset$ 平面 $ABCD$，∴$OP\perp OB$.

∵$PB\perp BC$，$BC/\!/AD$，∴$PB\perp AD$.

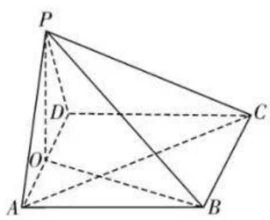
又∵$OP\perp AD$，$OP\subset$ 平面 POB，$PB\subset$ 平面 POB，$OP\cap PB=P$，∴$AD\perp$ 平面 POB.

又∵$OB\subset$ 平面 POB，∴$AD\perp OB$.

∴$OB=\sqrt{3}$，$PB=\sqrt{6}$.

设点 A 到平面 PBC 的距离为 h，

则 $V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$ 即 $\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OP$，∴$h=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ………… 6 分



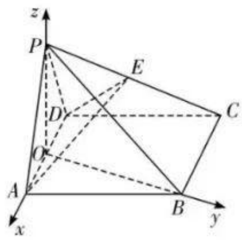
(2) 由(1)，分别以 OA，OB，OP 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系. 则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$C(-2,\sqrt{3},0)$，$A(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(-2,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OP}=(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$.

设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则$\overrightarrow{PE}=(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PE}=(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

得$E(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，则$\overrightarrow{AE}=(-2\lambda-1,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

又$OP\perp$平面$ABCD$，则取平面$ABCD$的法向量$\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$.

设AE与平面$ABCD$所成的角为θ，则



$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}_1\rangle|=\dfrac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{(-2\lambda-1)^2+3\lambda^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$.

则$E\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

设平面ADE的法向量$\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=-2x=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AE}=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}z=0.\end{cases}$

令$y=2$，则取平面ADE的法向量$\boldsymbol{n}_2=(0,2,-1)$，又平面$ABCD$的法向量$\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$.

故平面ADE与平面$ABCD$夹角的余弦值为$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. …………………… 12 分

19.【解析】(1)方法一：X的所有可能取值为 0，1，2，3，

在一次扑球中，扑到点球的概率$P=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，…………………… 1 分

所以$P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{8}{9}\right)^3=\dfrac{512}{729}$，$P(X=1)=C_3^1\ \dfrac{1}{9}\times\left(\dfrac{8}{9}\right)^2=\dfrac{192}{729}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{1}{9}\right)^2\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{24}{729}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{1}{9}\right)^3=\dfrac{1}{729}$，…………………… 3 分

所以 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{24}{729}$	$\frac{1}{729}$

$E(X)=\dfrac{192}{729}\times1+\dfrac{24}{729}\times2+\dfrac{1}{729}\times3=\dfrac{243}{729}=\dfrac{1}{3}$. …………………… 4 分

方法二：依题意可得，门将每次可以扑到点球的概率为$p=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$. …………………… 1 分

门将在前三次扑到点球的个数X可能的取值为 0，1，2，3，易知$X\sim B\left(3,\dfrac{1}{9}\right)$，…………………… 2 分

所以$P(X=k)=C_3^k\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^k\times\left(\dfrac{8}{9}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$，…………………… 3 分

故X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

所以X的期望$E(X)=3\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$. …………………… 4 分

(2)①第n次传球之前球在甲脚下的概率为p_n，

则当$n\geqslant2$时，第$n-1$次传球之前球在甲脚下的概率为p_{n-1}，

第$n-1$次传球之前球不在甲脚下的概率为$1-p_{n-1}$，…………………… 5 分

则$p_n=p_{n-1}\times0+(1-p_{n-1})\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}p_{n-1}+\dfrac{1}{2}$，…………………… 7 分

即$p_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_{n-1}-\dfrac{1}{3}\right)$，又$p_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，

所以$\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$是以$\dfrac{2}{3}$为首项，公比为$-\dfrac{1}{2}$的等比数列. …………………… 8 分

②由①可知$p_n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$，所以$p_{10}=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^9+\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3}$，…………………… 10 分

所以$q_{10}=\dfrac{1}{2}(1-p_{10})=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^9\right]>\dfrac{1}{3}$，

故$p_{10}<q_{10}$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)由已知，$P_n\left(a_n,\dfrac{2a_n}{a_n+1}\right)$，从而有 $Q_n\left(a_{n+1},\dfrac{2a_n}{a_n+1}\right)$。 …………………………………… 1 分

因为 Q_n 在 $y=\dfrac{1}{3x}$ 上，所以有 $\dfrac{2a_n}{a_n+1}=\dfrac{1}{3a_{n+1}}$， …………………………………… 2 分

解得 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}$， …………………………………… 3 分

由 $a_1>0$ 及 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}$，知 $a_n>0$，下证：$a_{2n-1}<\dfrac{1}{2}<a_{2n}$.

因为 $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)}{6a_n}$，所以 $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}$ 与 $a_n-\dfrac{1}{2}$ 异号， …………………………………… 4 分

注意到 $a_1-\dfrac{1}{2}<0$，知 $a_{2n-1}-\dfrac{1}{2}<0$，$a_{2n}-\dfrac{1}{2}>0$， …………………………………… 5 分

即 $a_{2n-1}<\dfrac{1}{2}<a_{2n}$. …………………………………… 6 分

(2)由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}$ 可得 $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)}{6a_n}$，$a_{n+1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\left(a_n+\dfrac{1}{3}\right)}{6a_n}$， …………………………………… 8 分

所以有 $\dfrac{a_{n+1}-\dfrac{1}{2}}{a_{n+1}+\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n-\dfrac{1}{2}}{a_n+\dfrac{1}{3}}$，即 $\left\{\dfrac{a_n-\dfrac{1}{2}}{a_n+\dfrac{1}{3}}\right\}$ 是以 $-\dfrac{1}{4}$ 为首项，以 $-\dfrac{2}{3}$ 为公比的等比数列， …………………………………… 10 分

则 $\dfrac{a_n-\dfrac{1}{2}}{a_n+\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，解得 $a_n=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}{1+\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$. …………………………………… 12 分

21.【解析】(1)不妨设点 A 在第一象限，$\angle AOF=\alpha$，则 $\angle AOB=2\alpha$.

因为 $OA\perp AB$，则 $|OA|=|OB|\cos 2\alpha$，$|AB|=|OB|\sin 2\alpha$.

由已知，$|OB|\cos 2\alpha+|OB|=\sqrt{3}|OB|\sin 2\alpha$，即 $\cos 2\alpha+1=\sqrt{3}\sin 2\alpha$.

即 $2\cos^2\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$.

因为 $\cos\alpha\neq 0$，则 $\cos\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$，即 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

因为 α 为渐近线 OA 的倾斜角，则 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，即 $a=\sqrt{3}b$. 又 $\sqrt{a^2+b^2}=2$，则 $a=\sqrt{3}$，$b=1$.

所以双曲线 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$. …………………………………… 5 分

(2)由题意易知直线 l_1 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+m$，

联立直线 l_1 与双曲线 C 的方程，消去 y，得 $(3k^2-1)x^2+6kmx+3m^2+3=0$，

$\Delta=36k^2m^2-12(3k^2-1)(m^2+1)=12(m^2+1-3k^2)=0$，

得 $m^2=3k^2-1$，则 $m\neq 0$， …………………………………… 6 分

设切点 $P(x_1,y_1)$，则 $x_1=-\dfrac{6km}{2(3k^2-1)}=-\dfrac{3k}{m}$， …………………………………… 7 分

$y_1=kx_1+m=-\dfrac{3k^2}{m}+m=\dfrac{m^2-3k^2}{m}=-\dfrac{1}{m}$. …………………………………… 8 分

设 $Q(x_2,y_2)$，因为 Q 是直线 l_1 与直线 l_2 的交点，所以 $x_2=\dfrac{3}{2}$，$y_2=\dfrac{3}{2}k+m$， …………………………………… 9 分

假设 x 轴上存在定点 $M(x_0,0)$ 满足条件，则 $MP\perp MQ$ 恒成立，

即：$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-x_0,y_1)\cdot(x_2-x_0,y_2)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+y_1y_2$

$=x_1x_2+y_1y_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2=-\dfrac{9k}{2m}-\dfrac{3k}{2m}-1-x_0\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3k}{m}\right)+x_0^2$

$=x_0^2-\dfrac{3}{2}x_0-1+\dfrac{3k}{m}(x_0-2)=\dfrac{1}{2}(x_0-2)(2x_0+1)+\dfrac{3k}{m}(x_0-2)$

$=(x_0-2)\left(x_0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3k}{m}\right)=0$， …………………………………… 11 分

故存在 $x_0=2$，使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，即 $MP\perp MQ$.

所以 x 轴上存在定点 $M(2,0)$ 在以 PQ 为直径的圆上. …………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 由题意，$f'(x)=\dfrac{\ln a(1-x)}{e^x}+a\cos x$， …………………………………………………… 1 分

因为 $x=0$ 为 $f'(x)$ 的零点，所以 $f'(0)=0$，即 $\ln a+a=0$，

从而 $f'(x)=\dfrac{-a(1-x)}{e^x}+a\cos x=a[\cos x-(1-x)e^{-x}]$， …………………………………………………… 2 分

①因为 $f(0)=0$，所以 0 是 $f(x)$ 的零点；

②当 $x\in(0,\pi]$ 时，设 $g(x)=\cos x-(1-x)e^{-x}$，则 $g'(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x$，

(ⅰ)若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，令 $h(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x$，则 $h'(x)=(x-3)e^{-x}-\cos x<0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，因为 $h(0)=2>0$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$，

所以存在唯一的 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $h(x_0)=0$， …………………………………………………… 3 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)=g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增；

当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$h(x)=g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减； …………………………………………………… 4 分

(ⅱ)若 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},2\right]$，令 $\varphi(x)=(2-x)e^{-x}$，则 $\varphi'(x)=(x-3)e^{-x}<0$，

故 $\varphi(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},2\right]$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)<\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}<\dfrac{1}{e}$.

又 $\sin x\geqslant\sin 2=\sin(\pi-2)>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $g'(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x<0$，$g(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},2\right]$ 上单调递减； …………………………………………………… 5 分

(ⅲ)若 $x\in(2,\pi]$，则 $g'(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x<0$，$g(x)$ 在区间 $(2,\pi]$ 上单调递减.

由(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)可得，$g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，在区间 $(x_0,\pi]$ 上单调递减，

因为 $g(x_0)>g(0)=0$，$g(\pi)=(\pi-1)e^{-\pi}-1<0$，所以存在唯一 $x_1\in(x_0,\pi)$ 使得 $g(x_1)=0$.

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)=ag(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递增，$f(x_1)>f(0)=0$，

当 $x\in(x_1,\pi]$ 时，$f'(x)=ag(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(x_1,\pi]$ 上单调递减.

因为 $f(x_1)>f(0)=0$，$f(\pi)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(x_1,\pi]$ 上有且只有一个零点， …………………………………………………… 6 分

综上可得，$f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有两个零点. …………………………………………………… 7 分

(2) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\sin x$，则不等式化为 $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}<mx$，即为 $mx-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}>0$.

令 $G(x)=mx-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$，

则 $G'(x)=m-\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=m-\dfrac{2}{2+\cos x}+\dfrac{3}{(2+\cos x)^2}=3\left(\dfrac{1}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3}\right)^2+m-\dfrac{1}{3}$， …………………………………………………… 8 分

(ⅰ)当 $m\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$G'(x)\geqslant 0$，$G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $G(0)=0$，故 $m\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时满足题意； …………………………………………………… 9 分

(ⅱ)当 $0<m<\dfrac{1}{3}$ 时，令 $H(x)=\sin x-3mx$，则 $H'(x)=\cos x-3m$ 在 $(0,+\infty)$ 上有无数零点，

且存在最小的一个零点 x_2，当 $x\in(0,x_2)$ 时，$H'(x)>0$，则 $H(x)$ 在区间 $(0,x_2)$ 上单调递增，

所以 $H(x)>H(0)=0$，即 $\sin x>3mx$，所以 $\forall x\in(0,x_2)$，$\dfrac{\sin x}{2+\cos x}>\dfrac{\sin x}{3}>mx$，

所以 $mx-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}<0$，故 $0<m<\dfrac{1}{3}$ 不满足题意，舍去； …………………………………………………… 10 分

(ⅲ)当 $m\leqslant 0$ 时，因为 $x>0$，所以 $mx\leqslant 0$，

令 $n(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$，$n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{2+\cos\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2}>0$，不满足题意，舍去. …………………………………………………… 11 分

综上可得，$m\geqslant\dfrac{1}{3}$，即实数 m 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$. …………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。