

## 成都七中高 2023 届三诊模拟考试数学（文科）

一. 选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请将选项填涂在答题卡上）

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x-3| < 2\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{x+1}{x-2} \leq 0\right\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $(1, 2]$                       B.  $(1, 2)$                       C.  $[-1, 5]$                       D.  $[-1, 5)$

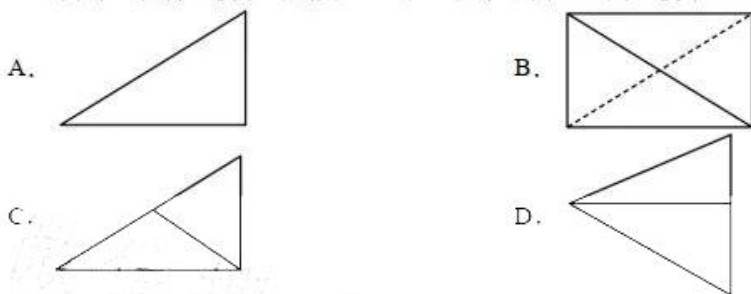
2. 已知复数  $z$  满足  $(2+3i)z = 1+i$  ( $i$  为虚数单位), 则在复平面内复数  $z$  对应的点位于 ( )

- A. 第四象限                      B. 第三象限                      C. 第二象限                      D. 第一象限

3. 命题“有一个偶数是素数”的否定是 ( )

- A. 任意一个奇数是素数                      B. 任意一个偶数都不是素数  
C. 存在一个奇数不是素数                      D. 存在一个偶数不是素数

4. 三棱锥  $P-ABC$  的底面  $ABC$  为直角三角形,  $\triangle ABC$  的外接圆为圆  $O$ ,  $PQ \perp$  底面  $ABC$ ,  $Q$  在圆  $O$  上或内部, 现将三棱锥的底面  $ABC$  放置在水平面上, 则三棱锥  $P-ABC$  的俯视图不可能是 ( )



5. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} f(x+1), & x \leq 0 \\ x^2 - 3x - 4, & x > 0 \end{cases}$ , 则  $f(f(-4)) =$  ( )

- A. -6                      B. 0                      C. 4                      D. 6

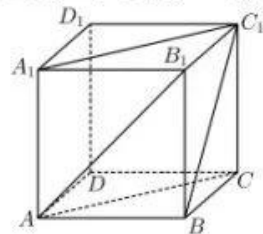
6. 已知实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x+y-2 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$ , 则  $\frac{x+y}{x}$  的最大值是 ( )

- A. 2                      B.  $\frac{8}{3}$                       C. 3                      D. 4

7. 中国古代许多著名数学家对推导高阶等差数列的求和公式很感兴趣, 创造并发展了名为“垛积术”的算法, 展现了聪明才智. 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》和《算法通变本末》中, 所讨论的二阶等差数列与一般等差数列不同, 前后两项之差并不相等, 但是后项减前项之差组成的新数列是等差数列. 现有一个“堆垛”, 共 50 层, 第一层 2 个小球, 第二层 5 个小球, 第三层 10 个小球, 第四层 17 个小球,  $\dots$ , 按此规律, 则第 50 层小球的个数为 ( )

- A. 2400                      B. 2401                      C. 2500                      D. 2501

8. 如图, 长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=BC=2$ , 若直线  $AB_1$  与平面  $ACC_1A_1$  所成的角为  $30^\circ$ , 则直线  $BC_1$  与直线  $AC$  所成的角为 ( )



- A.  $30^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $90^\circ$

9. 使“ $a < b$ ”成立的一个充分不必要条件是 ( )
- A.  $\forall x \in (0, 1], a \leq b+x$       B.  $\forall x \in (0, 1], a+x < b$   
 C.  $\exists x \in [0, 1], a < b+x$       D.  $\exists x \in [0, 1], a+x \leq b$
10. 瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系, 并写出以下公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ,  $i$  为虚数单位), 这个公式在复变论中占有非常重要的地位, 被誉为“数学中的天桥”. 根据此公式, 下面四个结果中不成立的是 ( )
- A.  $e^{ix} + 1 = 0$       B.  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2022} = 1$   
 C.  $|e^{ix} + e^{-ix}| \leq 2$       D.  $-2 \leq e^{ix} - e^{-ix} \leq 2$
11. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点为  $F_1$ , 直线  $y = kx (k > 0)$  与双曲线  $C$  交于  $P, Q$  两点, 且  $\angle PF_1Q = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\overline{PF_1} \cdot \overline{F_1Q} = 4$ , 则当  $\frac{1}{2}a^2 + \frac{b^2}{a^2}$  取得最小值时, 双曲线  $C$  的离心率为 ( )
- A. 3      B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{2}$       D. 2
12. 已知  $a \in \mathbf{R}, b \neq 0$ , 若  $x = b$  是函数  $f(x) = (x-b)(x^2 + ax + b)$  的极小值点, 则实数  $b$  的取值范围为 ( )
- A.  $b < 1$  且  $b \neq 0$       B.  $b > 1$       C.  $b < 2$  且  $b \neq 0$       D.  $b > 2$

二. 填空题 (本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 请将答案填在答题卡指定横线上)

13. 已知  $\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (-1, 1)$ , 则  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影为 \_\_\_\_\_.
14. 2023 年五一劳动节到来之前, 某市物价部门对本市 5 家商场的某种商品一天的销售量及其价格进行调查, 5 家商场这种商品的售价  $x$  (单位: 元) 与销售量  $y$  (单位: 件) 之间的一组数据如下表所示:

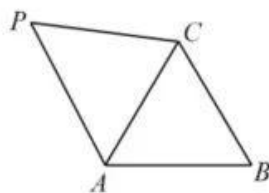
|         |    |     |     |      |    |
|---------|----|-----|-----|------|----|
| 价格 $x$  | 8  | 9.5 | $m$ | 10.5 | 12 |
| 销售量 $y$ | 16 | 10  | 8   | 6    | 5  |

经分析, 销售量  $y$  件与价格  $x$  元之间有较强的线性关系, 其线性回归直线方程为  $\hat{y} = -3.5x + 44$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

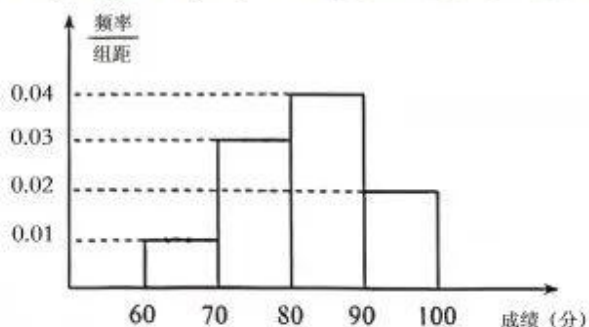
15. 已知在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} = a_{n+1} - 1$ , 则  $a_{20} =$  \_\_\_\_\_.
16. 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 直线  $l$  的方程为:  $x = ty + 7$ ,  $l$  交抛物线于  $M, N$  两点, 且  $\overline{MF} \cdot \overline{NF} = 0$ , 抛物线在  $M, N$  处的切线交于点  $P$ , 则  $\Delta PMN$  的面积为 \_\_\_\_\_.
- 三. 解答题 (本大题共 7 小题, 17-21 题各 12 分, 22 或 23 题 10 分. 解答过程应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 请作答在答题卡上)

17. 如图,  $\Delta ABC$  是边长为 2 的正三角形,  $P$  在平面上且满足  $CP = CA$ , 记  $\angle CAP = \theta$ .

- (1) 若  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , 求  $PB$  的长;
- (2) 用  $\theta$  表示  $S_{\Delta PAB}$ , 并求  $S_{\Delta PAB}$  取值范围.



18. 2023年4月12日是成都七中118周年校庆. 为了纪念这一特殊的日子, 两校区学生会在全校学生中开展了校庆知识测试(满分100分), 随机抽取了10名学生的测试成绩, 按照 $[60, 70)$ ,  $[70, 80)$ ,  $[80, 90)$ ,  $[90, 100]$ 分组, 得到如下所示的样本频率分布直方图:



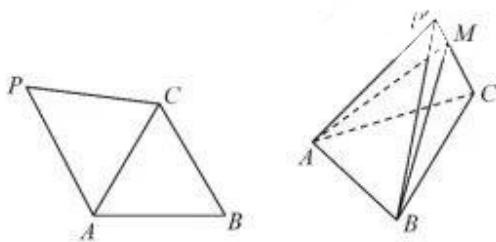
(1) 根据频率分布直方图, 估计该校学生测试成绩的中位数;

(2) 被抽取的10名同学中, 成绩在 $[80, 90]$ 中恰好有一半男生一半女生. 从中随机抽取2名学生, 求这2名同学中至少有一人是女生的概率.

19. 平面图形如图17题,  $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形,  $P$ 在平面上满足 $CP=CA$ . 将 $\triangle ACP$ 沿 $AC$ 翻折, 使点 $P$ 到达 $P'$ 的位置, 若平面 $P'BC \perp$ 平面 $ABC$ , 且 $BC \perp P'A$ .

(1) 作平面 $\alpha$ , 使得 $AP' \subset \alpha$ , 且 $BC \perp \alpha$ . 说明作图方法并证明;

(2) 点 $M$ 满足 $\vec{MC} = 2\vec{P'M}$ , 求 $V_{C-AMB}$ 的值.



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $F_1, F_2$ 为 $C$ 的左右焦点. 点 $P(1, -\frac{3}{2})$ 为椭圆上一点, 且 $|PF_1| + |PF_2| = 4$ . 作 $P$ 作两直线与椭圆 $C$ 相交于相异的两点 $A, B$ , 直线 $PA, PB$ 的倾斜角互补, 直线 $AB$ 与 $x, y$ 轴正半轴相交.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程;

(2) 求直线 $AB$ 的斜率.

21. 已知函数  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$ ;

(1) 求函数  $f(x)$  的极值;

(2) 证明:  $\sin \frac{1}{2} + \sin \frac{2}{4} + \sin \frac{3}{8} + \dots + \sin \frac{2023}{2^{2023}} < 2$ .

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一个题目计分. 请考生用 2B 铅笔将答题卡上所做题目的题号涂黑.

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ y = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}),$$
 以坐标

原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho \in \mathbb{R})$ .

(1) 求  $C$  的普通方程与  $l$  的直角坐标方程; 来源: 高三答案公众号

(2) 求  $l$  与  $C$  交点的极坐标.

23. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}|x-a| (a \in \mathbb{R})$ .

(1) 当  $a=2$  时, 解不等式  $|x - \frac{1}{3}| + f(x) \geq 1$ ;

(2) 设不等式  $|x - \frac{1}{3}| + f(x) \leq x$  的解集为  $M$ , 若  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \subseteq M$ , 求实数  $a$  的取值范围.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw