高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$B=\{x|2^x\leqslant 4,x\in \mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$

A. $[1,2]$　　B. $[1,4]$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,4\}$

2. 若复数 z 满足 $|z|+\bar{z}=8-4i$（i 为虚数单位），则 $z=$

A. $3+4i$　　B. $-3+4i$　　C. $4+3i$　　D. $4-3i$

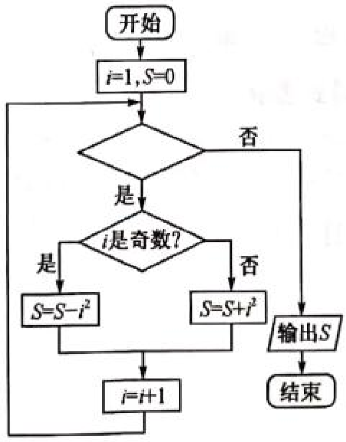
3. 若 $\tan\alpha=2$，则 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ 的值为

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{5}$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 为正数，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，若 $a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_{14}=b_4$，则 $d+q=$

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

5. 执行如图所示的程序框图，若输出 S 的值为 10，则图中第一个判断框中的条件可以是



A. $i<6?$　　B. $i<4?$　　C. $i<5?$　　D. $i<7?$

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在双曲线的右支上，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\angle F_1F_2P=60°$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}+1$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{2}$

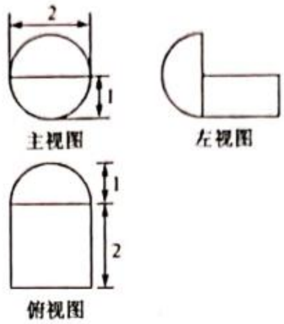
7. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是

A. $4+4\pi$

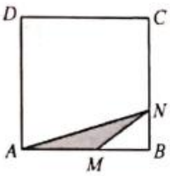
B. $4+3\pi$

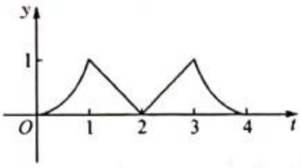
C. $4+5\pi$

D. 4π

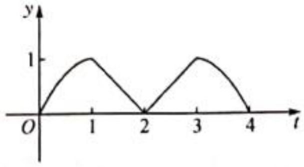


8. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，点 M 从点 A 出发，沿 $A\to B\to C\to D\to A$ 方向，以每秒 2 个单位的速度在正方形 $ABCD$ 的边上运动；点 N 从点 B 出发，沿 $B\to C\to D\to A$ 的方向，以每秒 1 个单位的速度在正方形 $ABCD$ 的边上运动. 点 M 与点 N 同时出发，记运动时间为 t（单位：秒），$\triangle AMN$ 的面积为 $f(t)$（规定 A,M,N 共线时其面积为零），则点 M 第一次到达点 A 时，$y=f(t)$的图象为

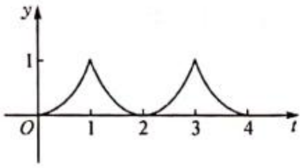




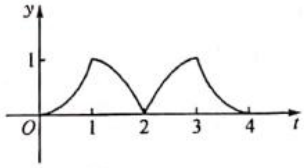
A



B

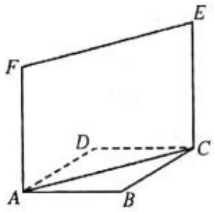


C



D

9. 如图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$AB=1$，点 A,B,C,D,E,F 在同一个球面上，则该球的体积是



A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$　　B. $\dfrac{4\pi}{3}$

C. $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$　　D. $\dfrac{32\pi}{3}$

10. 已知 $a=3.9^{3.9}$，$b=3.9^{3.8}$，$c=3.8^{3.9}$，$d=3.8^{3.8}$，则 a,b,c,d 的大小关系为

A. $d<c<b<a$　　B. $d<b<c<a$　　C. $b<d<c<a$　　D. $b<c<d<a$

11. 已知抛物线 $C:y^2=8x$，过其焦点 F 的直线 l 与其交于两点 A,B，若 $|AF|\cdot|BF|\leqslant 32$，则直线 l 的倾斜角的最大值为

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x^2+2x|, x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=a(x+3)$有四个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,4-2\sqrt{3})$　　B. $(4+2\sqrt{3},+\infty)$　　C. $[0,4-2\sqrt{3}]$　　D. $(0,4-2\sqrt{3})$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $60°$，且 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 $\lambda=$__________.

14. 已知 M 为直线 $x+y+a=0$ 上一点，过 M 点引圆 $O:x^2+y^2=2$ 的切线，若切线长的最小值为 $2\sqrt{2}$，则实数 $a=$__________.

15. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n-n$，则$\{a_n+1\}$是________数列（填“等差”或“等比”）；数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$________.（本小题第一空 3 分，第二空 2 分）

16. 已知函数 $f(x)=\sin x\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$，把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若函数 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 m 的最小值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

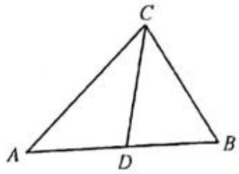
（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$B=60°$，D 为 AB 边上一点，$AD=4$，$CD=5$，$AC=7$.

（1）求 $\sin\angle ACB$ 的值；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积.



18.（本小题满分 12 分）

现代信息技术给我们的生活带来了革命性的变化，手机已成为人们生活中的必备品，但使用手机上网玩游戏已成为一个严重的社会问题，特别是在校学生过度玩手机，已严重影响了其身心和学业的发展，某校为了解学生使用手机的情况，随机调查了 100 名学生，对他们每天使用手机上网的时间进行了统计分析，得到如下的统计表：

时间（小时）	[0,0.5)	[0.5,1)	[1,1.5)	[1.5,2)	[2,2.5)	[2.5,3]
人数	20	25	25	15	10	5

（1）以样本估计总体，在该校中任取一名学生，则该生使用手机上网时间不低于 1 小时的概率约是多少？

（2）对样本中使用手机上网时间不低于 1.5 小时的学生，采用分层抽样的方法抽取 6 人，再在这 6 人中随机抽取 2 人，求抽取的 2 人使用手机上网时间均低于 2.5 小时的概率；

（3）进一步的统计分析发现，在使用手机上网低于 1 小时的学生中，综合素质考核为"优"的有 25 人，在使用手机上网不低于 1 小时的学生中，综合素质考核为"优"的有 20 人，问：能否在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下，认为综合素质考核为"优"与使用手机上网时间有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中 $n=a+b+c+d$）.

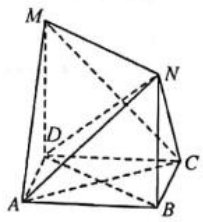
$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$MD\perp$ 平面 $ABCD$，$NB\perp$ 平面 $ABCD$，$MD=NB=1$.

证明：（1）$NC\parallel$ 平面 ADM；

（2）$DN\perp$ 平面 ACM.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,与直线 $l_1:x-y+\sqrt{5}=0$ 有且只有一个公共点.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)过点 $M(1,0)$的直线 l_2 与椭圆 E 交于两点 A,B,若$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$,求直线 l_2 的方程.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}x^2+(a-1)x-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直,求 a 的值及该切线方程;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$恒成立,求正数 a 的最小值.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程是$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\y=\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$($\alpha$ 为参数).以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C 的普通方程,并将其化为极坐标方程(化为 $\rho=f(\theta)$的形式);

(2)若点 A,B 在曲线 C 上,且$\angle AOB=90^\circ$,求$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}$的最大值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知 $f(x)=|x+a|-|x-2a|(a>0),g(m)=|m-1|+|m-4|$.

(1)若对任意实数 x 和 m,不等式 $f(x)\leqslant g(m)$恒成立,求 a 的最大值 M;

(2)在(1)的条件下,设 $k>0,l>0$,且$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=M$,求$\frac{1}{k-1}+\frac{4}{l-1}$的最小值.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1.C 集合 $A=[1,4]$，$B=\{x|x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$，所以 $A\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}=\{1,2\}$. 故选 C.

2.A 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $|z|+\bar{z}=8-4i$，即 $\sqrt{a^2+b^2}+a-bi=8-4i$，由两复数相等的充要条件得 $\sqrt{a^2+b^2}+a=8$，$b=4$，解得 $a=3,b=4$，所以 $z=3+4i$. 故选 A.

3.D 由 $\tan\alpha=2$，得 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$，$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=-\cos 2\alpha=1-2\cos^2\alpha=\frac{3}{5}$. 故选 D.

4.B 由 $a_2=b_2,a_{14}=b_4$，得 $\begin{cases}1+d=q,\\1+13d=q^3,\end{cases}$ 因为 $d>0$，所以 $q>1$，所以 $\frac{q^3-1}{q-1}=13$，即 $q^2+q-12=0$，解得 $q=3$(舍去负值)，所以 $d=2$，所以 $d+q=5$. 故选 B.

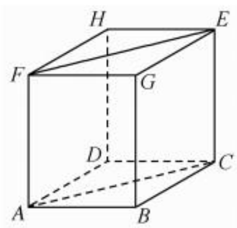
5.C 第一次执行循环体，$i=1,S=0-1^2=-1$；第二次执行循环体，$i=2,S=-1+2^2=3$；第三次执行循环体，$i=3,S=3-3^2=-6$；第四次执行循环体，$i=4,S=-6+4^2=10$，此时 $i=5$，结束循环，故第一个判断框中可以填入 $i<5$?. 故选 C.

6.A 根据题意 $\angle F_1PF_2=90°$，$\angle F_1F_2P=60°$. 设 $|F_1F_2|=2c$，则 $|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$，所以 $\sqrt{3}c-c=2a$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$. 故选 A.

7.C 由三视图知该几何体由两部分构成：一个半圆柱体，底面圆的半径为 1，高为 2；一个半球体，半径为 1，故其表面积为 $\frac{1}{2}\times 4\pi\times 1^2+\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2+\frac{1}{2}\times 2\pi\times 1\times 2+\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2+2\times 2=4+5\pi$. 故选 C.

8.A 根据题意，可得 $f(t)=\begin{cases}t^2,0\leqslant t\leqslant 1,\\2-t,1<t\leqslant 2,\\t-2,2<t\leqslant 3,\\(4-t)^2,3<t\leqslant 4.\end{cases}$ 其图象为选项 A 中的图象. 故选 A.

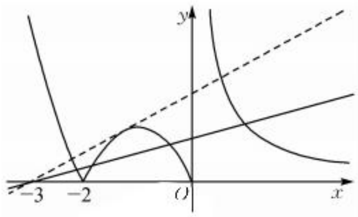
9.B 如图，作 BG，DH 与 AF 平行且相等. 因为 $AF\perp AC$，平面 $ACEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ACEF=AC$，$AF\subset$ 平面 $ACEF$，所以 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，所以六面体 $ABCD-FGEH$ 为正四棱柱，$AF=\sqrt{2}$，该四棱柱的对角线长为 $\sqrt{1+1+2}=2$，A,B,C,D,E,F 均在该四棱柱的外接球上，该球的半径为 1，故其体积为 $\frac{4\pi}{3}$. 故选 B.



10.B 构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(3.9)<f(3.8)$，所以 $\frac{\ln 3.9}{3.9}<\frac{\ln 3.8}{3.8}$，即 $3.8\ln 3.9<3.9\ln 3.8$，所以 $\ln 3.9^{3.8}<\ln 3.8^{3.9}$，所以 $3.9^{3.8}<3.8^{3.9}$；因为 $y=x^{3.8}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $3.8^{3.8}<3.9^{3.8}$，同理 $3.8^{3.9}<3.9^{3.9}$，所以 $3.8^{3.8}<3.9^{3.8}<3.8^{3.9}<3.9^{3.9}$，即 $d<b<c<a$. 故选 B.

11.D $F(2,0)$，当直线 l 的斜率不存在时，$A(2,4)$，$B(2,-4)$，$|AF|\cdot|BF|=16$，满足要求；当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-2)$，与抛物线方程联立，得 $k^2x^2-4(k^2+2)x+4k^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4(k^2+2)}{k^2}=4(1+\frac{2}{k^2})$，$x_1x_2=4$. 由抛物线定义知 $|AF|=x_1+2$，$|BF|=x_2+2$，所以 $|AF|\cdot|BF|=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=8+8(1+\frac{2}{k^2})\leqslant 32$，解得 $k\geqslant 1$ 或 $k\leqslant -1$，即 $\tan\theta\geqslant 1$ 或 $\tan\theta\leqslant -1$（θ 为 l 的倾斜角），所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$，或 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，综上可知，直线 l 的倾斜角的最大值为 $\frac{3\pi}{4}$. 故选 D.

12. D　设 $y=a(x+3)$，该直线恒过点$(-3,0)$，结合函数图象，可知若方程 $f(x)=a(x+3)$有四个不同的实数根，则 $a>0$ 且直线 $y=a(x+3)$与曲线 $y=-x^2-2x,x\in(-2,0)$，有两个不同的公共点，所以 $x^2+(2+a)x+3a=0$ 在$(-2,0)$内有两个不等实根，令 $g(x)=x^2+(2+a)x+3a$，实数 a 满足$\begin{cases}\Delta=(2+a)^2-12a>0,\\ -2<-\frac{2+a}{2}<0,\\ g(0)=3a>0,\\ g(-2)=a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<4-2\sqrt{3}$，又 $a>0$，所以实数 a 的取值范围是$(0,4-2\sqrt{3})$. 故选 D.



13. $\frac{1}{4}$　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=0$，即 $3\lambda\boldsymbol{e}_1^2+(3-2\lambda)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_2^2=0$，即 $3\lambda+(3-2\lambda)\times\frac{1}{2}-2=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

14. $\pm2\sqrt{5}$　圆心到直线的距离为$\frac{|a|}{\sqrt{2}}$，切线长为 $\sqrt{|MO|^2-2}$，当$|MO|$最小时，切线长最小，又$|MO|_{\min}=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$，所以 $\sqrt{\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right)^2-2}=2\sqrt{2}$，解得 $a=\pm2\sqrt{5}$.

15. 等比(3 分) $(-2)^n-1$(2 分)　由 $S_n=\frac{2}{3}a_n-n$，得 $a_1=-3$，再由 $S_n=\frac{2}{3}a_n-n$，得 $S_{n+1}=\frac{2}{3}a_{n+1}-n-1$，两式相减，得 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n-1$，即 $a_{n+1}=-2a_n-3$，所以 $a_{n+1}+1=-2(a_n+1)$，故数列$\{a_n+1\}$是首项为-2、公比为-2的等比数列，所以 $a_n+1=(-2)(-2)^{n-1}=(-2)^n$，$a_n=(-2)^n-1$.

16. $\frac{\pi}{6}$　$f(x)=\sin x\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\sin^2x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}$.

该函数图象向右平移 $m(m>0)$个单位长度后，得到 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-2m-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}$，该函数图象关于 y 轴对称的充要条件是 $-2m-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $m=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $m>0$，取 $k=-1$，得 m 的最小值为$\frac{\pi}{6}$.

17. 解：(1)在$\triangle ACD$中，由余弦定理，得 $\cos A=\frac{16+49-25}{2\times4\times7}=\frac{5}{7}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$， ………………… 3 分

所以 $\sin\angle ACB=\sin[180°-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{2\sqrt{6}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{6}+5\sqrt{3}}{14}$. ………………………………………………………… 6 分

(2)在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得$\frac{7}{\sin 60°}=\frac{BC}{\sin A}$，所以 $BC=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{2}$， ………………………………………… 9 分

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}\times7\times4\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{6}+5\sqrt{3}}{14}=4\sqrt{3}+5\sqrt{6}$. ……………………………………………… 12 分

18. 解：(1)在样本中使用手机上网时间不低于 1 小时的频率为$\frac{25+15+10+5}{100}=0.55$，以样本估计总体，在该校学生中任取一人，其使用手机上网时间不低于 1 小时的概率约是 0.55. ……………………………………………… 2 分

(2)用手机上网时间不低于 1.5 小时的学生共 30 人，使用分层抽样，则上网时间在区间$[1.5,2)$内的有 3 人，记作 a,b,c，在区间$[2,2.5)$内的有 2 人，记作 A,B，在区间$[2.5,3]$内的有 1 人，记作 λ.

从这 6 人中抽取 2 人,基本事件为 $ab,ac,aA,aB,a\lambda;bc,bA,bB,b\lambda;cA,cB,c\lambda;AB,A\lambda;B\lambda$ 共 15 个,其中含有 λ 的基本事件有 $a\lambda,b\lambda,c\lambda,A\lambda,B\lambda$ 共 5 个,故所求的概率为 $1-\frac{5}{15}=\frac{2}{3}$. ………………………………… 7 分

(3)统计结果的 2×2 列联表为:

	低于 1 小时	不低于 1 小时	合计
优	25	20	45
非优	20	35	55
合计	45	55	100

……………………………………………………………… 9 分

$K^2=\frac{100\times(25\times35-20\times20)^2}{45\times55\times45\times55}\approx3.683>2.706$, ………………………………… 11 分

所以在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下,可以认为综合素质考核为"优"与使用手机上网时间有关. ………… 12 分

19. 证明:(1)因为 $MD\perp$平面 $ABCD$,$NB\perp$平面 $ABCD$,所以 $MD/\!/NB$. ………………………… 1 分

又 $MD\subset$平面 ADM,$NB\not\subset$平面 ADM,所以 $NB/\!/$平面 ADM. ………………………… 2 分

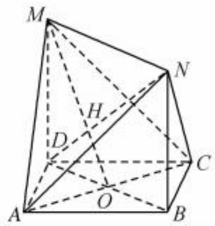
因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BC/\!/AD$.

又 $AD\subset$平面 ADM,$BC\not\subset$平面 ADM,所以 $BC/\!/$平面 ADM. ………………………… 3 分

又 $NB,BC\subset$平面 BCN 且 $NB\cap BC=B$,所以平面 $BCN/\!/$平面 ADM, ………………………… 4 分

又 $NC\subset$平面 BCN,所以 $NC/\!/$平面 ADM. ………………………… 5 分

(2)设 $AC\cap BD=O$,$MO\cap DN=H$.



由(1),得 $MD/\!/NB$,由已知,得 $MD=NB=1$,所以四边形 $MNBD$ 为平行四边形; ……… 8 分

因为 $MD\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $MD\perp BD$,

所以平行四边形 $MNBD$ 为矩形,且 $MN=BD=\sqrt{2}$. ………………………… 9 分

由 O 为 BD 的中点,得 $OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\frac{MN}{DM}=\frac{DM}{OD}=\sqrt{2}$,

所以 Rt$\triangle MND\backsim$Rt$\triangle MDO$,从而$\angle DMH=\angle MNH$,

因为$\angle DMH+\angle NMH=90^\circ$,所以$\angle MNH+\angle NMH=90^\circ$,从而$\angle MHN=90^\circ$,即 $MO\perp DN$; ………… 10 分

因为 $ABCD$ 为正方形,所以 $AC\perp BD$,又 $MD\perp$平面 $ABCD$,且 $AC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $MD\perp AC$,又 $MD,BD\subset$平面 $BDMN$,且 $MD\cap BD=D$,所以 $AC\perp$平面 $MNBD$, ………… 11 分

又 $DN\subset$平面 $MNBD$,所以 $AC\perp DN$.

又 $MO\cap AC=O$,$MO,AC\subset$平面 ACM,所以 $DN\perp$平面 ACM. ………………………… 12 分

20. 解:(1)由椭圆 E 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,得$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,解得 $a^2=4b^2$,

故椭圆方程为$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,即 $x^2+4y^2-4b^2=0$. ………………………… 2 分

把 $y=x+\sqrt{5}$代入并整理,得 $5x^2+8\sqrt{5}x+20-4b^2=0$,

因为 E 与 l_1 有且只有一个公共点,所以 $\Delta=(8\sqrt{5})^2-4\times5(20-4b^2)=0$,解得 $b^2=1$,

所以椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… 5 分

(2)当直线 l_2 的斜率为 0 时,则 A,B 的坐标为$(-2,0),(2,0)$,不符合$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$,故直线 l_2 的斜率不为 0,设 l_2 的方程为 $x=ty+1$,代入椭圆方程并整理得$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$, ………………………… 6 分

则 $\Delta=4t^2+12(t^2+4)>0$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$ ①,$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$ ②.

$\overrightarrow{AM}=(1-x_1,-y_1)$,$\overrightarrow{MB}=(x_2-1,y_2)$,由$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$,得$-y_1=2y_2$ ③, ………………………… 8 分

由①③,得 $y_1=\frac{-4t}{t^2+4}$,$y_2=\frac{2t}{t^2+4}$,代入②,得$\frac{-8t^2}{(t^2+4)^2}=\frac{-3}{t^2+4}$,解得 $t=\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. ………………… 11 分

故直线 l_2 的方程为 $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}y+1$,即$\sqrt{5}x\pm2\sqrt{3}y-\sqrt{5}=0$. ………………………………

21. 解:(1)$f'(x)=ax+(a-1)-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(ax-1)}{x}(x>0)$, …… 1分

$f'(1)=2(a-1)$,由题意知 $2(a-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,解得 $a=2$,所以 $f(x)=x^2+x-\ln x$,$f(1)=2$,所以切点坐标为 $(1,2)$,又切线斜率为 2,故所求的切线方程为 $y-2=2(x-1)$,即 $y=2x$. …… 5分

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{(x+1)(ax-1)}{x}(x>0)$,

当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{2a}-\ln\frac{1}{a}$,

…… 8分

不等式 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立,等价于 $f\left(\frac{1}{a}\right)\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立,即 $1-\frac{1}{2a}-\ln\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立,即 $\frac{1}{2a}+\ln\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{2}$ 恒成立,

…… 10分

令 $g(x)=\frac{1}{2}x+\ln x$,显然 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $g(1)=\frac{1}{2}$,所以 $g(x)\leqslant\frac{1}{2}$ 等价于 $g(x)\leqslant g(1)$,所以 $0<x\leqslant1$,即 $0<\frac{1}{a}\leqslant1$,即 $a\geqslant1$,故正数 a 的最小值为 1. …… 12分

22. 解:(1)由题意得 $\frac{x-1}{2}=\cos\alpha$,$\frac{y}{\sqrt{3}}=\sin\alpha$.

得 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,即曲线 C 的普通方程为 $3x^2+4y^2-6x=9$. …… 2分

把 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$ 代入,得 $3\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta-6\rho\cos\theta=9$,

即 $4\rho^2=\rho^2\cos^2\theta+6\rho\cos\theta+9$,即 $4\rho^2=(\rho\cos\theta+3)^2$.

根据曲线 C 的参数方程,$-1\leqslant x\leqslant3$,故 $\rho\cos\theta+3=x+3>0$,所以 $\rho=\frac{3}{2-\cos\theta}$. …… 5分

(2)设 $A(\rho_1,\theta)$,则 $B(\rho_2,\theta\pm90^\circ)$. …… 6分

所以 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{2-\cos\theta}{3}+\frac{2-\cos(\theta\pm90^\circ)}{3}=\frac{4-(\cos\theta\pm\sin\theta)}{3}$

$=\frac{4-\sqrt{2}\cos(\theta\mp45^\circ)}{3}\leqslant\frac{4+\sqrt{2}}{3}$, …… 9分

即 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}$ 的最大值为 $\frac{4+\sqrt{2}}{3}$. …… 10分

23. 解:(1)根据题意,得 $f(x)_{\max}\leqslant g(m)_{\min}$. …… 1分

因为 $f(x)=|x+a|-|x-2a|\leqslant|(x+a)-(x-2a)|=|3a|=3a$(当且仅当 $x\geqslant2a$ 时取等号),

所以 $f(x)_{\max}=3a$; …… 3分

因为 $g(m)\geqslant|(m-1)-(m-4)|=3$(当且仅当 $1\leqslant m\leqslant4$ 时取等号),

所以 $g(m)_{\min}=3$. …… 4分

于是 $0<3a\leqslant3$,解得 $0<a\leqslant1$,所以 $M=1$. …… 5分

(2)由(1)得 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1$,因为 k,l 为正实数,所以 $k>1,l>1$,得 $k-1>0,l-1>0$. …… 6分

由 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1$,得 $k+l=kl$,即 $(k-1)(l-1)=1$, …… 7分

所以 $\frac{1}{k-1}+\frac{4}{l-1}\geqslant2\sqrt{\frac{4}{(k-1)(l-1)}}=4$. …… 9分

当且仅当 $\begin{cases}l-1=4(k-1),\\(l-1)(k-1)=1,\end{cases}$ 即 $k=\frac{3}{2}$,$l=3$ 时等号成立,

所以 $\frac{1}{k-1}+\frac{4}{l-1}$ 的最小值为 4. ……

关于我们