咸阳市 2022 ~2023 学年度第二学期期末教学质量调研检测

高二数学(理科)试题参考答案及评分标准

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. B 2. C 3. A 4. A 5. B 6. A 7. B 8. D 9. C 10. D 11. B 12. D

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 40 14. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 15. 30 16. $\sqrt{3}$

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 解:(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

由 $a_3=5, S_{10}=100$,可得$\begin{cases} a_3=a_1+2d=5, \\ S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}\times d=100, \end{cases}$

解得:$a_1=1, d=2$,

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1.$ ……………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $a_n=2n-1$,

由 $b_n=2^{a_n}$,可得 $b_n=2^{2n-1}=2\cdot 4^{n-1}$,

$\therefore$ 数列$\{b_n\}$是首项为 2,公比为 4 的等比数列,

$\therefore$ 数列$\{b_n\}$的前 5 项和 $T_5=\frac{2\times(1-4^5)}{1-4}=682.$ ……………………………………………… (10 分)

18. 解:(Ⅰ)$f(x)=\cos x\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 x-1)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$,

$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

即函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π. ……………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$,

$\because x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$,$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$,

由 $y=\sin t$ 的图像可知,当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$,即 $x=-\frac{\pi}{12}$时,有 $f(x)_{\min}=-1$,

故当 $x=-\frac{\pi}{12}$时,$f(x)_{\min}=-1.$ …………………………………………………………… (12 分)

19. 解:(Ⅰ)计算 $K^2=\frac{100(20\times 40-30\times 10)^2}{30\times 70\times 50\times 50}\approx 4.762>3.841$,

故有 95% 的把握认为"对机动车强制报废标准是否了解与性别有关". ……………………… (6 分)

（Ⅱ）$\bar{t}=\frac{1}{5}(2+4+6+8+10)=6$，$\bar{y}=\frac{1}{5}(0.3+0.3+0.5+0.7+0.8)=0.52$，

故 $\hat{b}=\frac{0.6+1.2+3+5.6+8-5\times6\times0.52}{4+16+36+64+100-5\times36}=\frac{2.8}{40}=0.07$，

$\hat{a}=0.52-0.07\times6=0.1$，

所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=0.07t+0.1(0<t\leqslant12)$. ……………………………………………（12 分）

20. 解：（Ⅰ）证明：$\because\ \angle BDC=60°$，$BD=2CD=2$，

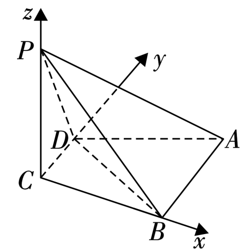
$\therefore$ 由余弦定理得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle BDC=3$，$\therefore\ BC=\sqrt{3}$，

$\therefore\ BD^2=CD^2+BC^2$，则 $BC\perp CD$，

$\because$ 平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

$\therefore\ BC\perp$ 平面 PCD. …………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）如图，以 CB，CD，CP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(\sqrt{3},2,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

$\therefore\ \overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$，

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ -y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $y=\sqrt{3}$，得 $x=-1$，$z=1$，

$\therefore\ \boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3},1)$，

易得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，

$\therefore\ |\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$ 平面 PAD 与平面 PCD 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………（12 分）

21. 解：（Ⅰ）$\because$ 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(0,1)$，$\therefore\ b=1$，

$\because$ 椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\ e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，

$\therefore\ \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，$\therefore\ a=2b=2$，

$\therefore$ 椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由题可设直线 l：$y=k(x-1)$，其中 $k\neq0$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则有 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$，

由（Ⅰ）可知，椭圆右顶点 B 的坐标为 $(2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{BC}=(x_1-2,y_1),\overrightarrow{BD}=(x_2-2,y_2)$，

若 $\angle CBD$ 能为直角，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

即 $(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$

$=(1+k^2)x_1x_2-(k^2+2)(x_1+x_2)+k^2+4$

$=\dfrac{(1+k^2)(4k^2-4)}{1+4k^2}-(k^2+2)\cdot\dfrac{8k^2}{1+4k^2}+k^2+4=0$，

解得 $k=0$，不符合题意.

故 $\angle CBD$ 不能为直角. ……………………………………………………………………（12 分）

22. 解：（Ⅰ）$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$，$\therefore f'(1)=\ln 2+\dfrac{1}{2}$，

又 $f(1)=\ln 2$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\ln 2=\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)$，即 $y=\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\right)x-\dfrac{1}{2}$. ……

……………………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）$h(x)=g(x)-f(x)=ax+\dfrac{a}{x+1}-a-x\ln(x+1)$，$x\in(-1,0)$，

$\therefore h'(x)=a-\dfrac{a}{(x+1)^2}-\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$，

$h''(x)=\dfrac{2a}{(x+1)^3}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2a-(x+1)^2-(x+1)}{(x+1)^3}=\dfrac{2a-(x^2+3x+2)}{(x+1)^3}$，

$\because y=x^2+3x+2$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，$\therefore x^2+3x+2\in(0,2)$.

当 $a\geqslant 1$ 时，$2a-(x^2+3x+2)>0$，$\therefore h''(x)>0$，

$\therefore h'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，$\therefore h'(x)<h'(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，$\therefore h(x)>h(0)=0$，

$\therefore a\geqslant 1$ 符合题意；……………………………………………………………………（10 分）

当 $0<a<1$ 时，存在实数 $x_0\in(-1,0)$，使 $x\in(x_0,0)$ 时，$2a-(x^2+3x+2)<0$，即 $h''(x)<0$，

$\therefore h'(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上单调递减，

$\therefore h'(x)>h'(0)=0$，$\therefore h(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上单调递增，

$\therefore x\in(x_0,0)$ 时，$h(x)<h(0)=0$，

$\therefore 0<a<1$ 不符合题意.

综上，正实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………………………………………（12 分）