哈尔滨工程大学
2014 年自主选拔录取考试试题

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1．n 是小于100的正整数，并且满足等式：$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=n$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，这样的正整数n共有_________个.

解：当且仅当正整数$n=6k$或$n=6k+1$时，等式成立。又因为$n<100$，所以共有16个正整数满足条件。

2．设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项之和，已知$S_{10}=100$，$S_{100}=10$，则$S_{110}=$___.

解：一般地，设$a_n=a_1+(n-1)d$，d为公差，则

$$S_m=a_1m+\frac{m(m-1)}{2}d=n,\quad S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d=m,$$

解得$d=-\frac{2(m+n)}{mn}$，$a_1=\frac{m^2+n^2+mn-m-n}{mn}$，

所以$S_{m+n}=(m+n)a_1+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}d=-(m+n)$.

由题知$S_{10}=100$，$S_{100}=10$，故$S_{110}=-110$.

3．设常数$a>0,b>0$，函数$f(x)=\frac{x}{(a+x)(b+x)}(x>0)$，则$f(x)$的最大值为________.

解：$f(x)=\frac{x}{(a+x)(b+x)}=\frac{1}{x+\frac{ab}{x}+(a+b)}\le\frac{1}{2\sqrt{ab}+(a+b)}=\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$，

当且仅当$x=\sqrt{ab}$时取等号.

4．在边长为1的正三角形ABC的边AB,AC上分别取D,E两点，使沿线段DE折叠三角形时，顶点A正好落在边BC上，AD的长度的最小值为_________.

解：设$AD=x$，$\angle ADE=\alpha$，作ΔADE关于DE的对称形，设A的对称点F落在BC上。在ΔBDF中，由正弦定理得$\frac{x}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1-x}{\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})}$，因此

$$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})}\le\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=2\sqrt{3}-3,$$

当且仅当$\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})=1$，即$\alpha=\frac{5\pi}{12}$时取等号，此时$AD$取得最小值$2\sqrt{3}-3$.

5．设复数z_1与z_2在复平面上对应的点分别为A与B，且$|z_1|=4$，$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，O是坐标原点，则ΔAOB的面积为_________.

解：易知$z_1\ne0$，所以$(\frac{z_2}{z_1})^2-2\frac{z_2}{z_1}+4=0$，解得$\frac{z_2}{z_1}=1\pm\sqrt{3}i=2(\cos\frac{\pi}{3}\pm\sin\frac{\pi}{3}i)$.

因此$|z_2|=2|z_1|=8$，且z_1,z_2间夹角为$\frac{\pi}{3}$，所以$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot|z_1|\cdot|z_2|\cdot\sin\frac{\pi}{3}=8\sqrt{3}$.

6．若不等式$\sqrt{x}+\sqrt{y}\le k\sqrt{x+2y}$对任意正实数$x,y$成立，则$k$的最小值为___.

解：对正实数x,y，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\le k\sqrt{x+2y}$成立等价于$k\ge\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+2y}}=\dfrac{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}{\sqrt{\frac{x}{y}+2}}$恒成立.

设$t=\dfrac{x}{y}>0$，令$f(t)=\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+2}}$，则$f'(t)=\dfrac{2-\sqrt{t}}{2\sqrt{t}(\sqrt{t+2})^3}$，因此$f(t)_{\max}=f(4)=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

因此$k\ge\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，即$k$的最小值为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

7．在$1,2,\cdots,2014$中随机选取三个数，将这三个数从小到大排列能构成等差数列的概率是________.

解：在$1,2,\cdots,2014$中随机选取三个数有C_{2014}^3种情况，设这三个数从小到大排列为a,b,c，若构成等差数列当且仅当a,c均为奇数或偶数，有$C_{1007}^2+C_{1007}^2$种情况.

因此概率为$\dfrac{C_{1007}^2+C_{1007}^2}{C_{2014}^3}=\dfrac{1}{1342}$.

8．对任意定义在区间D上的函数$f(x)$，若实数$x_0\in D$满足$f(x_0)=x_0$，则称x_0为函数$f(x)$在D上的一个不动点．若函数$f(x)=2x+\dfrac{1}{x}+a$在区间$(0,+\infty)$上没有不动点，则实数a的取值范围是__________.

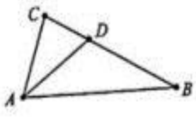
解：函数$f(x)=2x+\dfrac{1}{x}+a$在区间$(0,+\infty)$上没有不动点，等价于$x+\dfrac{1}{x}+a=0$在区间$(0,+\infty)$上无解，设$g(x)=x+\dfrac{1}{x}+a$，则只需$g(x)_{\min}=g(1)=2+a>0$．因此实数a的取值范围是$(2,+\infty)$.

二、解答题（本大题共6小题，每小题10分，满分60分）

1．在ΔABC中，$AB=2AC$，AD是$\angle A$的平分线，且$AD=k\cdot AC$.

（1）求实数k的取值范围；

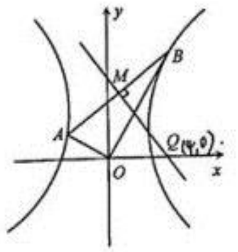
（2）若$S_{\Delta ABC}=1$，问：k为何值时BC最短?



2．已知A,B是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上不同的两点.

（1）若线段AB的中垂线（不和x轴重合）过点$Q(4,0)$，求证：线段AB的中点M的横坐标为定值；

（2）问a,b满足什么条件时，OA可能垂直于OB？



3．设 $(1+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n (n, a_n, b_n \in N^+)$

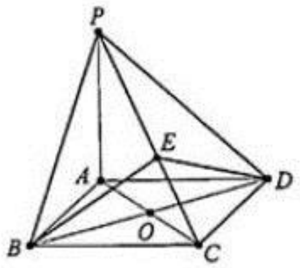
（1）求证：$a_{99} + b_{99} = 3^0 C_{100}^1 + 3^1 C_{100}^3 + 3^2 C_{100}^5 + \cdots + 3^{49} C_{100}^{99}$；

（2）设 $c_n = a_n^2 - 3b_n^2 (n \in N^+)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n})$ 的值．

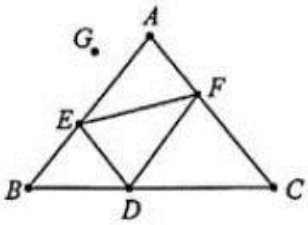
4．设四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，且 $PA \perp$ 底面 $ABCD$．

（1）求证：直线 $PC \perp$ 直线 BD．

（2）过直线 BD 且垂直于直线 PC 的平面交 PC 于点 E，如果三棱锥 $E-BCD$ 的体积取得最大值，求此时四棱锥 $P-ABCD$ 的高．



5．如图，在 ΔABC 中，$AB = AC$，D 在 BC 上，$DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，E, F 分别在 AB, AC 上，D 关于 EF 的对称点为 G．求证：A, G, B, C 四点共圆．



6．已知正数 a, b, c 的和为1，证明：$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \ge \frac{1}{2}$．

证明：由柯西不等式有

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+b+b+c+c+a} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2},$$

当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时取等．