高 2023 届学业质量调研抽测（第二次）

高三数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1～4．CBDD；　　　　　5～8．BABC.

二、选择题：本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．AD；　10．BCD；　11．BC；　12．ACD.

三、填空题：本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13．$\sqrt{65}$；　14．50°（答案不唯一）；　15．-2；　16．$(-2,2)$　，　$4\sqrt{2}$．

四、解答题：

17．解：(1)（法一）由余弦定理可得 $2c+b=2a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

即 $2c^2+bc=a^2+c^2-b^2$，整理可得 $b^2+c^2-a^2=-bc$，…………………………3 分

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

Q $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$.……………………………………………………5 分

（法二）由正弦定理可得 $2\sin C+\sin B=2\sin A\cos B$，

$\because \sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

$\therefore 2\cos A\sin B+\sin B=0$，……………………………………………………3 分

Q $\sin B\neq 0$，$\therefore \cos A=-\dfrac{1}{2}$，

Q $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$ ……………………………………………………5 分

(2) 在V ABC 中, $b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{2\pi}{3}=a^2$, 即 $b^2+c^2-a^2+bc=0$，

$b^2-a^2+c^2+3c=0$, 与上式结合可得 $b=3$,……………………………………6 分

$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$, 故 $bc=15$, 所以 $c=5$，　…………………………7 分

（法一）在$\triangle ABC$中，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=49$，

$\therefore a=7$，易得$\cos C=\frac{11}{14}$，

在$\triangle ACD$中，$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C=9+\frac{49}{4}-2\cdot3\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{11}{14}=\frac{19}{4}$，

故$AD=\frac{\sqrt{19}}{2}$. ……………………………………………………………10 分

（法二）$\because 2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$\therefore\left(2\overrightarrow{AD}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=9+25-15=19$，$\therefore\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{\sqrt{19}}{2}$.

……………………………………………………………………………10 分

18．解：（1）（法一）由$(n+1)a_n=4n^2+n+k$，令$n=1,2,3$，

得到$a_1=\frac{5+k}{2}$，$a_2=\frac{18+k}{3}$，$a_3=\frac{39+k}{4}$，……………………………………………1 分

$\because\{a_n\}$是等差数列，则$2a_2=a_1+a_3$，即$\frac{36+2k}{3}=\frac{5+k}{2}+\frac{39+k}{4}$

$\therefore k=-3$，………………………………………………………………………3 分

由于$(n+1)a_n=4n^2+n-3=(n+1)(4n-3)$

$\because n+1\neq0$，$\therefore a_n=4n-3$. …………………………………………………………4 分

（法二）$\because\{a_n\}$是等差数列，公差为d，设$a_n=a_1+d(n-1)=dn+(a_1-d)$

$\therefore(n+1)a_n=(n+1)(dn+a_1-d)=dn^2+a_1n+a_1-d$

$\therefore dn^2+a_1n+a_1-d=4n^2+n+k$对于$\forall n\in N^*$均成立

则$\begin{cases}d=4\\a_1=1\\a_1-d=k\end{cases}$，解得$k=-3$，$a_n=4n-3$. ………………………………………4 分

$\because 2T_n=3b_n-3$，$\therefore$当$n\geq2$时，$2T_{n-1}=3b_{n-1}-3$，两式相减得$2b_n=3b_n-3b_{n-1}\ (n\geq2)$，

即$b_n=3b_{n-1}\ (n\geq2)$，又$2b_1=3b_1-3$ $\therefore b_1=3$

$\therefore$数列$\{b_n\}$是首项为3，公比为3的等比数列，$\therefore b_n=3^n$.……………………7 分

（2）由（Ⅰ）知:$b_n=3^n$，则$b_4=81$，$b_5=243$，

$\because a_{52}=4\times 52-3=205$，$\therefore b_4<a_{52}<b_5$

$\therefore$数列$\{a_n\}$的前52项中有数列$\{b_n\}$中的项$b_2=9$和$b_4=81$，…………………9 分

$\therefore$数列$\{c_n\}$的前50项和为：

$$S_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_{52})-(9+81)=\frac{52(1+205)}{2}-90=5266.$$ ………………12 分

19．解：

（1）

	治愈	未治愈	合计
使用新药	60	40	100
未使用新药	50	50	100
合计	110	90	200

……………………………………………………………………2 分

由上表数据可知：

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200(60\times 50-50\times 40)^2}{100\times 100\times 110\times 90}=\frac{200}{99}\approx 2.020<2.706,$$

所以没有 90%的把握认为该种新药对治愈该病毒感染有作用．……………………5 分

（2）X 的可能取值为 0，1，2，3, 由题意可知，X 服从二项分布，则

$P(X=i)=C_3^i(0.6)^i(0.4)^{3-i}$（$i=0,1,2,3$），

X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

X 的期望为：$E(X)=np=1.8$．…………………………………………………9 分

(3) 假设新药的有效率确实达到 90%，设 10 个感染者使用该药治愈的人数为 X，则

$X \sim B(10, 0.9)$，$P(X \le 6) = \sum\limits_{i=0}^{6} C_{10}^{i}(0.9)^{i}(0.1)^{10-i} = 1 - \sum\limits_{i=7}^{10} C_{10}^{i}(0.9)^{i}(0.1)^{10-i} \approx 0.013$，

0.013是一个小概率，小概率事件竟然发生了，与小概率原理矛盾，所以有理由怀疑药厂的宣传. ……………………………………………………………………………12 分

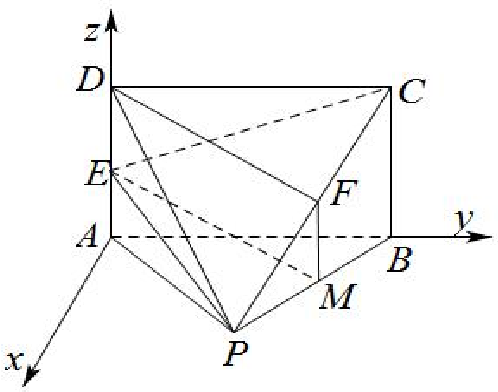
20.（1）证明：取PC的中点为F,连接MF，则$MF // BC // DE$,且$MF = \frac{1}{2}BC = DE$，

∴四边形$DEMF$是平行四边形，$\therefore DF // EM$，……………………………………3 分

∵ $DF \subset$平面PCD, $EM \not\subset$平面PCD,

∴直线$EM //$平面PCD. ……………………………………………………………5 分

（2）解：因为$AD \perp$平面PAB，则$AD \perp PA$，$AD \perp PB$，以A为原点，以垂直AB所在直线为x轴，AB为y轴，AD为z轴，建立空间直角坐标系$A-xyz$，如图所示……6 分



设$AD = 2$，则$AP = 2$，$AB = 2\sqrt{2}$．∵ $PA \perp PB$，

则$\angle PAB = 45^\circ$．$\therefore P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$，$D\left(0,0,2\right)$，

$B\left(0, 2\sqrt{2}, 0\right)$，$E\left(0,0,1\right)$，$C\left(0, 2\sqrt{2}, 2\right)$，

$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{EC} = \left(0, 2\sqrt{2}, 1\right)$，

$\overrightarrow{PC} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$，

$\overrightarrow{EM} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -1)$．……………………………………………………………8 分

设平面 PCE 的一个法向量为$\vec{n} = \left(x, y, z\right)$，则，

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z = 0, \\ 2\sqrt{2}y + z = 0, \end{cases}$

不妨令$y = -1$，得$z = 2\sqrt{2}$，$x = 3$，所以$\vec{n} = \left(3, -1, 2\sqrt{2}\right)$，…………………………10 分

设直线EM与平面PCE所成的角为θ，则

$\sin\theta=\left|\cos\left(\overrightarrow{EM},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{EM}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{EM}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}\times3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$，

所以直线 EM 与平面 PCE 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$． ……………………………………12 分

21．解：（1）由题意得，左焦点 $F_1(-1,0)\Rightarrow c=1$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=2$，$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的标准方程为：

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……………………………………………………………………4 分

（2）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，令 $x=0$，$y=t$，则 $P\left(0,t\right)$，则 $\overrightarrow{PM}=(x_1,y_1-t)$，

$\overrightarrow{MF_1}=\left(-1-x_1,-y_1\right)$，由 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF_1}$ 得 $\left(x_1,y_1-t\right)=\lambda\left(-1-x_1,-y_1\right)$，

解得 $\lambda=\dfrac{t}{y_1}-1$，同理 $\mu=\dfrac{t}{y_2}-1$． ……………………………………………………6 分

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=t\left(x+1\right)\end{cases}$，得 $\left(4+\dfrac{3}{t^2}\right)y^2-\dfrac{6}{t}y-9=0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{6t}{4t^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{-9t^2}{4t^2+3}$，

$\lambda+\mu=\dfrac{t}{y_1}+\dfrac{t}{y_2}-2=\dfrac{t\left(y_1+y_2\right)}{y_1y_2}-2=-\dfrac{8}{3}$． ……………………………………………8 分

不妨设 $y_1>0>y_2$，$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\left|y_1-y_2\right|=\dfrac{1}{2}(y_1-y_2)$，$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\left|y_1\right|=\dfrac{1}{2}y_1$，$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\left|y_2\right|=-\dfrac{1}{2}y_2$，

由 $\lambda=\dfrac{t}{y_1}-1$，$\mu=\dfrac{t}{y_2}-1$．得 $y_1=\dfrac{t}{1+\lambda}$，$y_2=\dfrac{t}{1+\mu}$，$\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{1+\lambda}{1+\mu}=-\dfrac{1+\lambda}{\dfrac{5}{3}+\lambda}$．代入

$S_1=mS_2-\lambda S_3$，有 $\dfrac{1}{2}\left(y_1-y_2\right)=\dfrac{1}{2}my_1+\dfrac{1}{2}\lambda y_2$，

则 $y_1-y_2=my_1+\lambda y_2$，

解得 $m=1-\dfrac{y_2}{y_1}-\lambda\dfrac{y_2}{y_1}=1-(1+\lambda)\dfrac{y_2}{y_1}=1+\dfrac{(1+\lambda)^2}{\dfrac{5}{3}+\lambda}=-\dfrac{1}{3}+(\dfrac{5}{3}+\lambda)+\dfrac{\dfrac{4}{9}}{\dfrac{5}{3}+\lambda}$，…………10 分

Q $-3 \le \mu \le -\frac{4}{3}, \therefore \frac{5}{3}+\lambda=-1-\mu \in [\frac{1}{3},2]$

设$u=\frac{5}{3}+\lambda$，则$u\in[\frac{1}{3},2]$，则$h(u)=-\frac{1}{3}+u+\frac{\frac{4}{9}}{u}$，则$h'(u)=1-\frac{4}{9}u^{-2}$，

令$h'(u)>0$，解得$\frac{2}{3}<u<2$，令$h'(u)<0$，解得$\frac{1}{3}<u<\frac{2}{3}$，

故 $h(u)$ 在 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{2}{3},2\right)$ 上单调递增，则 $h(u)_{\min}=h\left(\frac{2}{3}\right)=1$，且 $h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3},h(2)=\frac{17}{9}$，则$h(u)\in\left[1,\frac{17}{9}\right]$，则$m\in\left[1,\frac{17}{9}\right]$.……………………………12 分

22.（1）解：$\because f(x)=\ln x-ax+\frac{a}{x},\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{a}{x^2}=\frac{-ax^2+x-a}{x^2}$，

①当$a\ge\frac{1}{2}$时，$f(x)$的减区间为$(0,+\infty)$，

②当$0<a<\frac{1}{2}$时，$f(x)$的减区间为$\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right),\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a},+\infty\right)$

$f(x)$的增区间为$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$……………………………4 分

（2）证明：欲证$g(x)=\frac{\ln 2x}{x}+\frac{a\,\mathrm{e}^{-x}}{2x^2}-2a\,\mathrm{e}^x+1<0,$

需证$x+\ln 2x-2ax\,\mathrm{e}^x+\frac{a}{2x\,\mathrm{e}^x}<0$，

即需证$\ln\left(2x\,\mathrm{e}^x\right)-2ax\,\mathrm{e}^x+\frac{a}{2x\,\mathrm{e}^x}<0$，令$t=2x\,\mathrm{e}^x$，

即需证$\ln t-at+\frac{a}{t}<0$，设$h(t)=\ln t-at+\frac{a}{t},\because t=2x\,\mathrm{e}^x>1$，

由（Ⅰ）知当$a\ge\frac{1}{2}$时，$h(\mathrm{t})$的减区间为$(0,+\infty)$,

所以$h(t)<h(1)=0,$故$g(x)<0.$……………………………………………………8 分

(3)证明：由（Ⅱ）知，当$t>1,a=\frac{1}{2}$时，$\ln t<\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$,

令$t=\dfrac{2}{n}+1\left(n\in \mathrm{N}^{*}\right)$，则

$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{n}{n+2}\right)=2\left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right)<\frac{2}{n}$$

即$\ln(n+2)-\ln n<\dfrac{2}{n}$，…………………………………………………9 分

所以$\ln(n+3)-\ln(n+1)<\dfrac{2}{n+1}$

$\ln(n+4)-\ln(n+2)<\dfrac{2}{n+2}$

$\ln(n+5)-\ln(n+3)<\dfrac{2}{n+3}$

......

$\ln(2n+1)-\ln(2n-1)<\dfrac{2}{2n-1}$

$\ln(2n+2)-\ln(2n)<\dfrac{2}{2n}$

上各式相加得：

$$\ln(2n+2)+\ln(2n+1)-\ln n-\ln(n+1)<2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)(2n+2)}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\ln\left(4+\frac{2}{n}\right)>\ln 2$$

………………………………………………………………………………12 分