

保密★启用前

2020 年高三模拟考试

## 数学试题

本试卷共 6 页, 22 题, 全卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

参考公式: 锥体的体积公式:  $V = \frac{1}{3}Sh$  (其中  $S$  为锥体的底面积,  $h$  为锥体的高)

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 > x\}$ , 则  $\complement_U A =$

- A.  $[0, 1]$       B.  $(0, 1)$       C.  $(-\infty, 1]$       D.  $(-\infty, 1)$

2. 设复数  $z = \frac{2i}{1+i}$  (其中  $i$  为虚数单位), 则复数  $z$  在复平面内对应的点所在的象限为

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

3. 加强体育锻炼是青少年生活学习中非常重要的组成部分. 某学生做引体向上运动, 处于如图所示的平衡状态时, 若两只胳膊的夹角为  $60^\circ$ , 每只胳膊的拉力大小均为 400 N, 则该学生的体重 (单位: kg) 约为

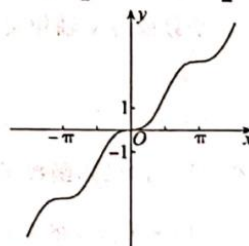
(参考数据: 取重力加速度大小为  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$ )

- A. 63      B. 69      C. 75      D. 81



4. 已知函数  $y = f(x)$  的部分图象如图, 则  $f(x)$  的解析式可能是

- A.  $f(x) = x + \tan x$   
B.  $f(x) = x + \sin 2x$   
C.  $f(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x$   
D.  $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos x$



5. 方舱医院的创设, 在抗击新冠肺炎疫情中发挥了不可替代的重要作用. 某方舱医院医疗小组有七名护士, 每名护士从周一到周日轮流安排一个夜班. 若甲的夜班比丙晚一天, 丁的夜班比戊晚两天, 乙的夜班比庚早三天, 己的夜班在周四, 且恰好在乙和丙的正中间, 则周五值夜班的护士为

- A. 甲      B. 丙      C. 戊      D. 庚

数学试题 第 1 页 (共 6 页)

6. 已知抛物线  $y^2=4x$  的焦点为  $F$ , 直线  $l$  过  $F$  且与抛物线交于  $A, B$  两点, 过  $A$  作抛物线准线的垂线, 垂足为  $M$ ,  $\angle MAF$  的角平分线与抛物线的准线交于点  $P$ , 线段  $AB$  的中点为  $Q$ . 若  $|AB|=8$ , 则  $|PQ| =$
- A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8
7. 洛书, 古称龟书, 是阴阳五行术数之源, 被世界公认为组合数学的鼻祖, 它是中华民族对人类的伟大贡献之一. 在古代传说中有神龟出于洛水, 其甲壳上有图 1: “以五居中, 五方白圈皆阳数, 四隅黑点为阴数”, 这就是最早的三阶幻方. 按照上述说法, 将 1 到 9 这九个数字, 填在如图 2 所示的九宫格里, 九宫格的中间填 5, 四个角填偶数, 其余位置填奇数. 则每一横行、每一竖列以及两条对角线上 3 个数字的和都等于 15 的概率是

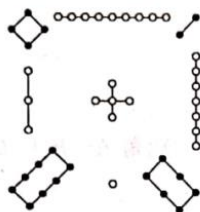


图 1

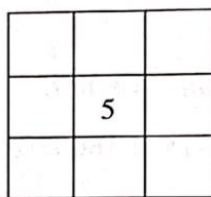
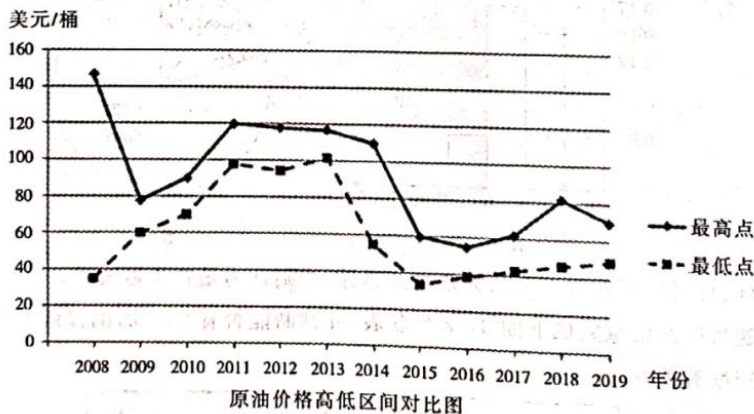


图 2

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{6}$                       C.  $\frac{1}{72}$                       D.  $\frac{1}{144}$
8. 已知直线  $y=ax+b(b>0)$  与曲线  $y=x^3$  有且只有两个公共点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 其中  $x_1 < x_2$ , 则  $2x_1 + x_2 =$
- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D.  $a$
- 二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.
9. 原油价格的走势在一定程度上反映了全球的经济形势. 下面是 2008 年至 2019 年国际原油价格高低区间的对比图.



下列说法正确的是

- A. 2008 年原油价格波动幅度最大
- B. 2008 年至 2019 年, 原油价格平均值不断变小
- C. 2013 年原油价格平均值一定大于 2018 年原油价格平均值
- D. 2008 年至 2019 年, 原油价格波动幅度均不小于 20 美元/桶

数学试题 第 2 页 (共 6 页)

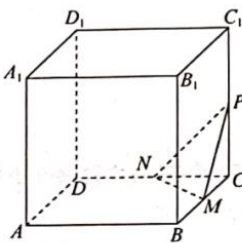


10. 已知符号函数  $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$  下列说法正确的是

- A. 函数  $y = \operatorname{sgn}(x)$  是奇函数  
B. 对任意的  $x > 1$ ,  $\operatorname{sgn}(\ln x) = 1$   
C. 函数  $y = e^x \cdot \operatorname{sgn}(-x)$  的值域为  $(-\infty, 1)$   
D. 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  为棱  $CC_1$  上的动点(点  $P$  不与点  $C, C_1$  重合), 过点  $P$  作平面  $\alpha$  分别与棱  $BC, CD$  交于  $M, N$  两点, 若  $CP = CM = CN$ , 则下列说法正确的是

- A.  $A_1C \perp$  平面  $\alpha$   
B. 存在点  $P$ , 使得  $AC_1 \parallel$  平面  $\alpha$   
C. 存在点  $P$ , 使得点  $A_1$  到平面  $\alpha$  的距离为  $\frac{5}{3}$



- D. 用过  $P, M, D_1$  三点的平面去截正方体, 得到的截面一定是梯形

12. 已知函数  $f(x) = (\sin x + \cos x) |\sin x - \cos x|$ , 下列说法正确的是

- A.  $f(x)$  是周期函数  
B.  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上是增函数  
C. 若  $|f(x_1)| + |f(x_2)| = 2$ , 则  $x_1 + x_2 = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$   
D. 函数  $g(x) = f(x) + 1$  在区间  $[0, 2\pi]$  上有且仅有 1 个零点

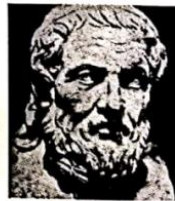
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ , 则  $\frac{1}{2} - \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6})$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线与圆  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  相切, 则该双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.

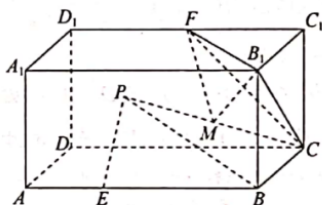
15. 已知  $e_1, e_2$  是夹角为  $\frac{\pi}{3}$  的单位向量, 若  $|ae_1 + be_2| = \sqrt{3} (a, b \in \mathbf{R})$ , 则  $a+b$  的最大值为\_\_\_\_\_.

16. 古希腊数学家阿波罗尼奥斯发现: 平面上到两定点  $A, B$  距离之比为常数  $\lambda (\lambda > 0$  且  $\lambda \neq 1)$  的点的轨迹是一个圆心在直线  $AB$  上的圆, 该圆简称为阿氏圆. 根据以上信息, 解决下面的问题:



阿波罗尼奥斯

如图,在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2AD=2AA_1=6$ , 点  $E$  在棱  $AB$  上,  $BE=2AE$ , 动点  $P$  满足  $BP=\sqrt{3}PE$ . 若点  $P$  在平面  $ABCD$  内运动, 则点  $P$  所形成的阿氏圆的半径为 \_\_\_\_\_; 若点  $P$  在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  内部运动,  $F$  为棱  $C_1D_1$  的中点,  $M$  为  $CP$  的中点, 则三棱锥  $M-B_1CF$  的体积的最小值为 \_\_\_\_\_. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = p$  ( $n \in \mathbb{N}_+$ ,  $p$  为常数), 则称数列  $\{a_n\}$  为等方差数列,  $p$  为公方差.

(1) 已知数列  $\{c_n\}$ ,  $\{d_n\}$ ,  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  分别满足  $c_n=2020$ ,  $d_n=\sqrt{n+1}$ ,  $x_n=2n+1$ ,  $y_n=3^n$ , 从上述四个数列中找出所有的等方差数列(不用证明);

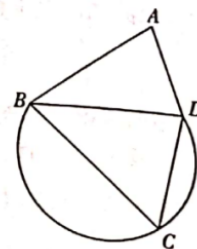
(2) 若数列  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公方差为 2 的等方差数列, 求数列  $\{a_n^2\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. (12 分)

如图, 平面四边形  $ABCD$ , 点  $B, C, D$  均在半径为  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  的圆上, 且  $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$ .

(1) 求  $BD$  的长度;

(2) 若  $AD=3$ ,  $\angle ADB=2\angle ABD$ , 求  $\triangle ABD$  的面积.



数学试题 第 4 页(共 6 页)

19. (12分)如图1,平面四边形  $ABCD$  中,  $AB=AC=\sqrt{2}$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AC \perp CD$ ,  $E$  为  $BC$  的中点,将  $\triangle ACD$  沿对角线  $AC$  折起,使  $CD \perp BC$ ,连接  $BD$ ,得到如图2所示的三棱锥  $D-ABC$ .

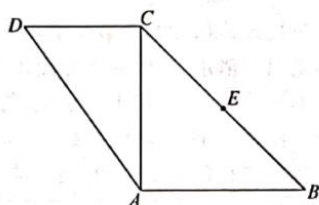


图1

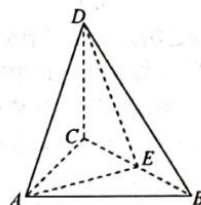


图2

- (1)证明:平面  $ADE \perp$  平面  $BCD$ ;  
(2)已知直线  $DE$  与平面  $ABC$  所成的角为  $\frac{\pi}{4}$ ,求二面角  $A-BD-C$  的余弦值.
20. (12分)网络购物已经成为人们的一种生活方式.某购物平台为了给顾客提供更好的购物体验,为入驻商家设置了积分制度,每笔购物完成后,买家可以根据物流情况、商品质量等因素对商家做出评价,评价分为好评、中评和差评.平台规定商家有50天的试营业时间,期间只评价不积分.正式营业后,每个好评给商家计1分,中评计0分,差评计-1分.某商家在试营业期间随机抽取100单交易,调查了其商品的物流情况以及买家的评价情况,分别制成了图1和图2.

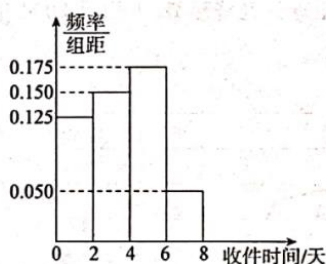


图1

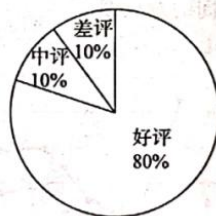


图2

- (1)通常收件时间不超过四天认为是物流迅速,否则认为是物流迟缓;  
请根据题目所给信息完成下面  $2 \times 2$  列联表,并判断能否有99%的把握认为“获得好评”与物流速度有关?

|      | 好评 | 中评或差评 | 合计 |
|------|----|-------|----|
| 物流迅速 |    |       |    |
| 物流迟缓 | 30 |       |    |
| 合计   |    |       |    |

(2)从正式营业开始,记商家在每笔交易中得到的评价得分为  $X$ . 该商家将试营业 50 天期间的成交情况制成了频数分布表(表 1),以试营业期间成交单数的频率代替正式营业时成交单数发生的概率.

表 1

|      |    |    |    |
|------|----|----|----|
| 成交单数 | 36 | 30 | 27 |
| 天数   | 10 | 20 | 20 |

(i)求  $X$  的分布列和数学期望;

(ii)平台规定,当积分超过 10 000 分时,商家会获得“诚信商家”称号,请估计该商家从正式营业开始,1 年内(365 天)能否获得“诚信商家”称号.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

|                   |       |       |       |       |       |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.150 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 |
| $k_0$             | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

21. (12 分)在平面直角坐标系  $xOy$  中,

①已知点  $A(\sqrt{3}, 0)$ , 直线  $l: x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 动点  $P$  满足到点  $A$  的距离与到直线  $l$  的距离之比为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

②已知圆  $C$  的方程为  $x^2 + y^2 = 4$ , 直线  $l$  为圆  $C$  的切线, 记点  $A(\sqrt{3}, 0)$ ,  $B(-\sqrt{3}, 0)$  到直线  $l$  的距离分别为  $d_1, d_2$ , 动点  $P$  满足  $|PA| = d_1, |PB| = d_2$ .

③点  $S, T$  分别在  $x$  轴,  $y$  轴上运动, 且  $|ST| = 3$ , 动点  $P$  满足  $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OT}$ .

(1)在①, ②, ③这三个条件中任选一个, 求动点  $P$  的轨迹方程;

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

(2)记(1)中的轨迹为  $E$ , 经过点  $D(1, 0)$  的直线  $l'$  交  $E$  于  $M, N$  两点, 若线段  $MN$  的垂直平分线与  $y$  轴相交于点  $Q$ , 求点  $Q$  纵坐标的取值范围.

22. (12 分)已知函数  $f(x) = \frac{a(e^x - x - 1)}{x^2}$ , 且曲线  $y = f(x)$  在  $(2, f(2))$  处的切线斜率为 1.

(1)求实数  $a$  的值;

(2)证明: 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 1$ ;

(3)若数列  $\{x_n\}$  满足  $e^{x_{n+1}} = f(x_n)$ , 且  $x_1 = \frac{1}{3}$ , 证明:  $2^n |e^{x_n} - 1| < 1$ .

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

**温馨提示：**

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html>