2022--2023学年度第二学期

高二数学（理科）期末考试试卷

答案解析部分

一、选择题

1.【答案】C

【解析】【解答】由题得 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}$，故复数 z 的虚部为 -1

故答案为：C.

2.【答案】A

【解析】【解答】“$\forall x\in\mathrm{R}$，$\mathrm{e}^x>0$”的否定为“$\exists x\in\mathrm{R}$，$\mathrm{e}^x\le 0$”.

故答案为：A

3.【答案】A

【解析】【解答】函数 f（x）=1+sinx，其导函数为 f′（x）=cosx，$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$， 故答案为：A.

4.【答案】D

【解析】【解答】A：根据描述知：该推理为一般到特殊的推理，符合演绎推理的定义，真命题；

B：若 $a//b$，$b//c$，根据平行公理的推论知：$a//c$，属于合情推理，真命题；

C：$\neg p$ 为真则 p 为假，又 $p\vee q$ 为真则 q 为真，真命题；

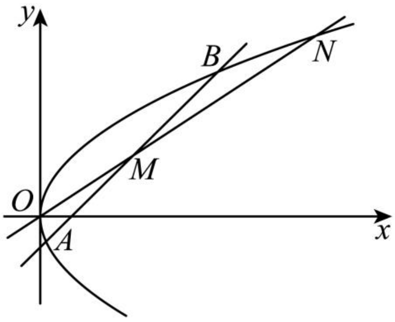
D：由题设 $sinx\in(0,1]$，$sinx+\frac{2}{sinx}\ge 2\sqrt{sinx\cdot\frac{2}{sinx}}=2\sqrt{2}$，但因为 $sinx=\pm\sqrt{2}\notin(0,1]$ 所以等号不成立，假命题.

故答案为：D

5.【答案】C

【解析】【解答】由 $\begin{cases}y=x-1\\ y^2=2px\end{cases}$ 消去 x 并整理得：$y^2-2py-2p=0$，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则有 $y_1+y_2=2p$，$x_1+x_2=(y_1+1)+(y_2+1)=2p+2$，因此线段 AB 的中点 $M(p+1，p)$，



依题意，$\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OM}$，于是 $N(3p+3,3p)$，而点 N 在抛物线 C 上，

则 $9p^2=2p(3p+3)$，又 $p>0$，所以 $p=2$.

故答案为：C

6.【答案】C

【解析】【解答】解不等式 $(x-2)(x+2)>0$ 可得 $x<-2$ 或 $x>2$，

因为 $\{x\mid x\geq 3\}$ $\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$，

故只有 C 选项中的条件才是“$(x-2)(x+2)>0$”的充分不必要条件.

故答案为：C.

7.【答案】B

【解析】【解答】设甲，乙两人全不相同为事件 A_1，甲，丙两人全不相同为事件 A_2，乙，丙两人全不相同为事件 A_3

则 A_1，A_2，A_3 的种类数都为 $C_6^2C_4^2C_6^2$，

$A_1\cap A_2$，$A_2\cap A_3$，$A_3\cap A_1$ 的种类数都为 $C_6^2C_4^2C_4^2$，

$A_1\cap A_2\cap A_3$ 的种类数为 $C_6^2C_4^2C_2^2$，

所以至少有两人全不相同的方法数为 $C_6^2C_4^2C_6^2\times 3-C_6^2C_4^2C_4^2\times 3+C_6^2C_4^2C_2^2=2520$，

故答案为：B.

8.【答案】B

【解析】【解答】因为乙、丙第 2，5 题答案相同，且总得分相同，所以第 2，5 两题答案正确

又因为甲得分 30 分即甲错两题且第 2 题、第 5 题答案均与乙丙不同，

故其余 6 题答案均正确，

故而这 8 道判断的答案分别是：╳╳╳√√╳√╳，

对比丁的答案，可知其 2、8 两题错误，故得分 m＝6×5＝30，

故答案为：B.

9.【答案】C

【解析】【解答】由题意，得 $a+b+c+\frac{1}{3}=1$，所以 $a+b+c=\frac{2}{3}$①.

因为 $E(X)=(-1)\times a+0\times b+1\times c+2\times\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$，所以 $-a+c=\frac{1}{12}$②.

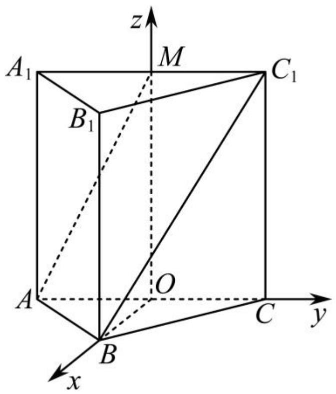
由 $P(X\geq 1)=c+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$，得 $c=\frac{1}{4}$，代入①②解得：$a=\frac{1}{6}$，$b=\frac{1}{4}$.

所以 $D(X)=\left(-1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(0-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(2-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{19}{16}$.

故答案为：C.

10.【答案】C

【解析】【解答】取线段 AC 的中点 O，则 $BO\perp AC$，设直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长为 2，以点 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x、y、z 的正方向建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,-1,0)$、$M(0,0,2)$、$B(\sqrt{3},0,0)$、$C_1(0,1,2)$，

所以，$\overrightarrow{AM}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-\sqrt{3},1,2)$，$cos\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

所以，$sin\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}\right\rangle=\sqrt{1-cos^2\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}\right\rangle}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故答案为：C.

11.【答案】B

【解析】【解答】解：由托勒密定理，得 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD=4\sqrt{3}$.

因为 $AC=\sqrt{3}BD$，所以 $BD=2$.

设圆 O 的半径为 R，由正弦定理，得 $\dfrac{AC}{sin\angle ADC}=\dfrac{BD}{sin\angle BAD}=2R$.

又 $AC=\sqrt{3}BD$，所以 $sin\angle ADC=\sqrt{3}sin\angle BAD$.

因为 $\angle ADC=2\angle BAD$，所以 $2sin\angle BADcos\angle BAD=\sqrt{3}sin\angle BAD$，

因为 $0<\angle BAD<\pi$，所以 $sin\angle BAD>0$，所以 $cos\angle BAD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $sin\angle BAD=\sqrt{1-cos^{2}\angle BAD}=\dfrac{1}{2}$，则 $2R=\dfrac{BD}{sin\angle BAD}=4$，故 $R=2$.

故答案为：B

12.【答案】D

【解析】【解答】令 $f(x)=x-1-lnx$，$x>0$，

则 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1-ln\mathrm{e}=\mathrm{e}-2=a$， $f(2)=2-1-ln2=1-ln2=b$，

$\because$ $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

$\therefore$ 当 $x>1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

$\therefore$ $f(\mathrm{e})>f(2)$，即 $a>b$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x}-x$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

$\therefore$ $g(\mathrm{e})>g(2)$，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}>\mathrm{e}^{2}-2$，

所以 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{2}>\mathrm{e}-2$，即 $c>a$.

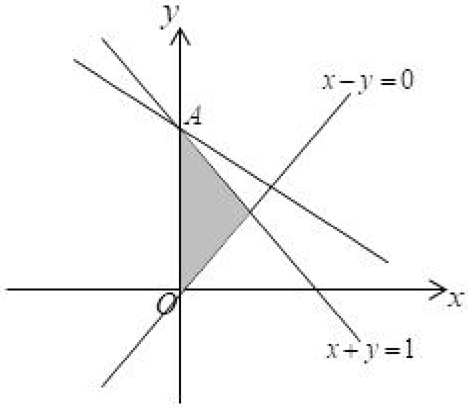
综上， $c>a>b$.

故答案为：D.

二、填空题

13.【答案】2

【解析】【解答】作出约束条件 $\begin{cases}x-y\le 0\\x+y\le 1\\x\ge 0\end{cases}$ 对应的平面区域，如图所示，



由 $z=x+2y$，可得直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ 过点 A 时，此时直线在 y 轴上的截距最大，此时 z 取得最大值，

又由 $\begin{cases} x=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$，解得 $A(0,1)$，

所以 z 的最大值为 $z=0+2\times1=2$．

故答案为：2.

14.【答案】$\frac{e^2-3}{2}$

【解析】【解答】$\int_1^e\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-lnx\right)\Big|_1^e=\left(\frac{1}{2}e^2-lne\right)-\frac{1}{2}=\frac{e^2-3}{2}$.

故答案为：$\frac{e^2-3}{2}$.

15.【答案】x+sinx（答案不唯一）

【解析】【解答】$f(x)$ 的解析式形式：$ax\pm bsin(x+\varphi)(ab\neq0)$ 或 $ax\pm bcos(x+\varphi)(ab\neq0)$ 均可.

如：$f(x)=x+sinx$ 定义域为 R，不是周期函数，且 $f'(x)=1+cosx$ 是周期为 2π 的函数.

故答案为：x+sinx（答案不唯一）

16.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】【解答】$\because a>0>b,\therefore a+1>0,2-b>0$，

$\because a-b=5,\therefore a+1+2-b=8$，

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2-b}=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{a+1}+\frac{8}{2-b}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{a+1+2-b}{a+1}+\frac{a+1+2-b}{2-b}\right)$$

$=\frac{1}{8}\times\left(2+\frac{2-b}{a+1}+\frac{a+1}{2-b}\right)\geq\frac{1}{8}\times(2+2)=\frac{1}{2}$，

当且仅当 $a+1=2-b$ 时，取等号.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

三、解答题

17.【答案】（1）解：等差数列 $\{a_n\}$ 中，$2a_3=a_2+a_4=14$，解得 $a_3=7$，因 a_1，a_2，a_6 成等比数列，即 $a_2^2=a_1a_6$，……………………………………2 分

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，于是得 $(7-d)^2=(7-2d)(7+3d)$，整理得 $d^2-3d=0$，而 $d\neq0$，解得 $d=3$，

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=3n-2$. ……………………………………………………5 分

（2）解：由（1）知，$b_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})$，……………………………7 分

所以 $S_n=\frac{1}{3}[(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})]=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})=\frac{n}{3n+1}$. ………………10 分

18.【答案】（1）解：因为 $c-\sqrt{3}bsinA=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}-b$，

所以由余弦定理得 $c-\sqrt{3}bsinA=acosB-b$，……………………………………1 分

由正弦定理得 $sinC-\sqrt{3}sinAsinB=sinAcosB-sinB$，……………………………2 分

由于 $sinC=sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB$，

整理得 $cosAsinB-\sqrt{3}sinAsinB=-sinB$. ………………………………………………4 分

又因为 $sinB\neq0$，所以 $cosA-\sqrt{3}sinA=-1$，即 $sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………6 分

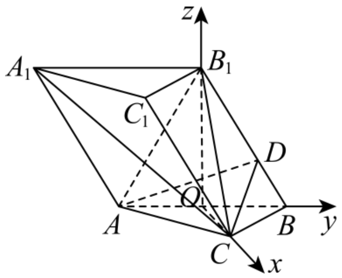
（2）解：由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times a\times2\sqrt{3}=\frac{1}{2}bcsin\frac{\pi}{3}$ 得 $bc=4a$，

又 $b=\frac{1}{4}c$，所以 $c^2=16a$，$b^2=a$，……………………………………………9 分

由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bccosA=a+16a-4a=13a$，

解得 $a=13$. ……………………………………………………………………………………………12 分

19.【答案】（1）证明：如图，取棱 AB 的中点 O，连接 OB_1，OC，AB_1.



由题意可知 AA_1B_1B 为菱形，且 $\angle ABB_1=60°$，则 $\triangle ABB_1$ 为正三角形.

因为 O 是棱 AB 的中点，所以 $OB_1\perp AB$． ………………………………………………2 分

由题意可知△ABC 是边长为 2 的等边三角形，则 $OC\perp AB$，$OC=\sqrt{3}$．

因为 $\triangle ABB_1$ 是边长为 2 的等边三角形，所以 $OB_1=\sqrt{3}$．

因为 $B_1C=\sqrt{6}$，所以 $OC^2+OB_1^2=B_1C^2$，所以 $OB_1\perp CO$． ……………………………2 分

因为 AB，$OC\subset$ 平面 ABC，且 $AB\cap OC=O$，所以 $OB_1\perp$ 平面 ABC．

因为 $OB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1． ……………………………………6 分

（2）解：由（1）可知 OB，OC，OB_1 两两垂直，故分别以 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB_1}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0)$． $C(\sqrt{3},0,0)$． $D\left(0,\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$A_1(0,-2,\sqrt{3})$，$B_1(0,0,\sqrt{3})$，故 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，

$\overrightarrow{CD}=\left(-\sqrt{3},\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$．

$\overrightarrow{A_1C}=(\sqrt{3},2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$． ……………………………………………………8 分

设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}x_1+y_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-\sqrt{3}x_1+\frac{2}{3}y_1+\frac{\sqrt{3}}{3}z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$，得 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},5)$．

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\vec{m}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=\sqrt{3}x_2+2y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=2y_2=0\end{cases}$,

令$x_2=1$，得$\vec{m}(1,0,1)$. ……………………………………………………………10 分

设平面 ACD 与平面A_1B_1C的夹角为θ，则$\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\ \vec{m}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{1+5}{\sqrt{29}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{58}}{29}$

即平面 ACD 与平面A_1B_1C夹角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{58}}{29}$. ……………………………………12 分

20.【答案】（1）解：由数据可得$\overline{x}=\dfrac{1+2+4+6+10+13+20}{7}=\dfrac{56}{7}=8$；

$\overline{y}=\dfrac{19+32+44+40+52+53+54}{7}=42$，

又$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=2788,\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=726$，……………………………………………………3 分

$\therefore\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2}=\dfrac{2788-7\times8\times42}{726-7\times8^2}=1.56835\approx1.57$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=42-\dfrac{436}{278}\times8=29.4532\approx29.45$.

$\therefore\hat{y}=1.57x+29.45$. ……………………………………………………………………6 分

（2）解：由题知，7 家超市中有 3 家超市的广告是“好广告”，X 的可能取值是 0，1，2，3

$P(X=0)=\dfrac{C_4^4}{C_7^4}=\dfrac{1}{35}P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^3}{C_7^4}=\dfrac{12}{35}$………………………………………………2 分

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_4^2}{C_7^4}=\dfrac{18}{35}P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_4^1}{C_7^4}=\dfrac{4}{35}$. ……………………………………………4 分

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

所以$E(X)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{60}{35}=\dfrac{12}{7}$. ……………………………………6 分

21.【答案】（1）解：由椭圆的离心率可得：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{c}{a}$，

根据短轴长可得：$2b=4$，$b=2$，

设 $a=2k$ ， $c=\sqrt{3}k$ ， $b=k=2$ ，所以 $a=4$ ，…………………………………2 分

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.……………………………………………………4 分

（2）解：设以点 $P(2,1)$ 为中点的弦与椭圆交于 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，

则 $x_1+x_2=4$ ，则 $y_1+y_2=2$ ，……………………………………………………6 分

分别代入椭圆的方程得， $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1$ ， $\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{4}=1$ ，两式相减可得

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$

$\therefore 4(x_1-x_2)+8(y_1-y_2)=0$ ，所以 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$ ，…………………………………8 分

故以点 $P(2,1)$ 为中点的弦所在直线方程为 $x+2y-4=0$ ；

由 $\begin{cases}x+2y-4=0\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ ，得 $y(y-2)=0$ ，

所以 $y=0$ ， $x=4$ ； $y=2$ ， $x=0$ ，………………………………………………10 分

所以 $|AB|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

故该直线截椭圆所得弦长为 $2\sqrt{5}$.……………………………………………………12 分

22.【答案】（1）解：当 $m=0$ 时， $f(x)=\frac{\ln x-2}{x}+1$，其定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\frac{3-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=e^3$，……………………………………………………………2 分

∴当 $x\in(0,\ e^3)$ 时， $f'(x)>0$；当 $x\in(e^3,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$，

∴ $f(x)$ 在 $(0,\ e^3)$ 单调递增，在 $(e^3,+\infty)$ 单调递减，

∴ $f(x)$ 的极大值为 $f(e^3)=\frac{1}{e^3}+1$，无极小值.…………………………………4 分

（2）解：由 $f(x)<0$ 得 $me^x+\frac{\ln x-2}{x}+1<0$，

∴ $m<\frac{2-\ln x-x}{xe^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.………………………………………………6 分

令 $h(x)=\dfrac{2-\ln x-x}{xe^x}$，则 $h'(x)=\dfrac{\left(-\frac{1}{x}-1\right)x-(2-\ln x-x)(x+1)}{x^2e^x}=\dfrac{(x+1)(x-3+\ln x)}{x^2e^x}$，

令 $\varphi(x)=x-3+\ln x$，易知 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\because \varphi(2)=\ln2-1<0$，$\varphi(3)=\ln3>0$，

$\therefore \exists x_0\in(2,3)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，即 $\ln x_0=3-x_0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{2-\ln x_0-x_0}{x_0e^{x_0}}$. ……………………………………………………………10 分

由 $\ln x_0=3-x_0$ 得 $\ln x_0+\ln e^{x_0}=\ln\left(x_0e^{x_0}\right)=3$，$\therefore x_0e^{x_0}=e^3$，

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{2-\ln x_0-x_0}{x_0e^{x_0}}=-\dfrac{1}{e^3}$，$\therefore m<-\dfrac{1}{e^3}$，

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{e^3}\right)$. ……………………………………………………………12 分