海南省2022—2023学年高三学业水平诊断(五)

数学·答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. **答案** C

命题意图 本题利用Venn图考查集合的概念与运算.

解析 Venn图中阴影部分表示$(\complement_U A)\cap B$,集合$A=\{x\mid(x+3)(x-2)>0\}=\{x\mid x>2$或$x<-3\}$,$\complement_U A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{0,1,2,3,4\}$,于是$(\complement_U A)\cap B=\{0,1,2\}$.

2. **答案** D

命题意图 本题考查复数的运算与概念.

解析 因为$z=1-\mathrm{i}$,所以$\bar{z}=1+\mathrm{i}$,于是$1-\mathrm{i}\bar{z}=2-\mathrm{i}$.

3. **答案** B

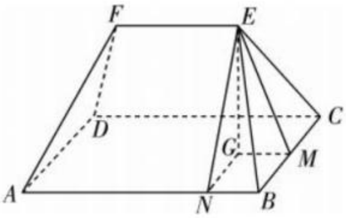
命题意图 本题考查幂函数的概念.

解析 因为$f(x)$是幂函数,所以$m^2+m-5=1$,解得$m=2$或$m=-3$,所以$f(x)=x^2$或$f(x)=x^{-3}$,分析选项可知只有B选项"$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减"符合这两个函数的性质.

4. **答案** A

命题意图 本题考查几何体的结构特征.

解析 如图所示,设点E在底面$ABCD$上的射影为G,作$GM\perp BC$,$GN\perp AB$,垂足分别为M,N. 设四个侧面与底面的夹角为θ,则在$\mathrm{Rt}\triangle EMG$和$\mathrm{Rt}\triangle ENG$中,$\angle EMG=\angle ENG=\theta$,又$GE$为公共边,所以$GN=GM$,即$\frac{AB-EF}{2}=\frac{BC}{2}$,整理得$AB=BC+EF$.



5. **答案** C

命题意图 本题考查古典概型的计算以及排列组合的应用.

解析 从5对夫妻中任选4人,则不同的选法有C_{10}^4种,这4人恰好是2对夫妻的选法有C_5^2种,故所求概率为$\frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{10}{210}=\frac{1}{21}$.

6. **答案** C

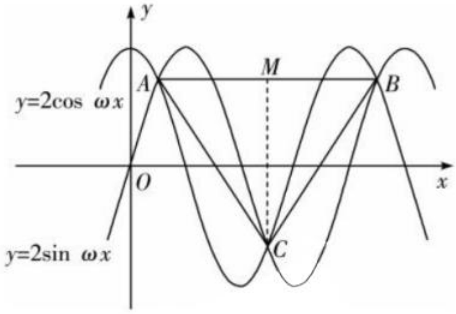
命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 由已知可得圆心$(1,1)$到两条直线的距离相等,过点$(1,1)$且斜率为2的直线方程为$y=2x-1$,则a,b关于-1对称,故$a+b=-2$.

7. **答案** B

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 如图,作出函数 $y=2\sin\omega x$ 和 $y=2\cos\omega x$ 的图象,不妨以图中 $\triangle ABC$ 为研究对象,由对称性可得 $\triangle ABC$ 是以 C 为顶角的等腰三角形,过 C 点作 $CM\perp AB$ 于 M,则 $AB=T=\frac{2\pi}{\omega}=2BM$,得 $BM=\frac{\pi}{\omega}$,由 $\sin\omega x=\cos\omega x$,得 $\cos\omega x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $y_B=-y_C=\sqrt{2}$,所以 $CM=2y_B=2\sqrt{2}$,要使 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,只需 $\angle CBA<\frac{\pi}{4}$ 即可,由 $\tan\angle CBA=\frac{CM}{BM}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\pi}{\omega}}<1$,整理得 $0<\omega<\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.



8. **答案** A

命题意图 本题考查导数与不等式.

解析 由 $f(-x)+f(x)=2\cos^2x$,可得 $f(-x)-\cos^2(-x)+f(x)-\cos^2x=0$. 设 $g(x)=f(x)-\cos^2x$,则 $g(-x)+g(x)=0$,所以 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 又在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)+\sin 2x<0$,即 $g'(x)=f'(x)+2\sin x\cos x=f'(x)+\sin 2x<0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,又 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,所以 $g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)<g\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$,即 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}<f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{3}{4}$,因此 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)<-\frac{1}{2}<0$,故 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)<f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** BC

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 对于 A,由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $\sqrt{3}\sin\theta=\cos\theta$,即 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 A 错误;

对于 B,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$,因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant\theta+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$,$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\in[-\sqrt{3},2]$,故 B 正确;

对于 C,将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点都放到坐标原点,则 $\boldsymbol{a}$ 所在直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$,$\boldsymbol{b}$ 的终点在单位圆上,要使 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$,只需取 $\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 即可,故 C 正确;

对于 D,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 等价于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的方向相反,而 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,结合 C 的分析可知,不存在满足条件的情况,故 D 错误.

10. **答案** BD

命题意图 本题考查抛物线的标准方程和性质.

解析 由已知得 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,$C$ 的准线为 $x=-\frac{1}{2}$.

对于 A,根据抛物线的定义可知 $x_0=|MF|-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,所以 $y_0^2=2\times\frac{3}{2}=3$,所以 $y_0=\pm\sqrt{3}$,故 A 错误;

对于 B,作图可知点 A 在抛物线的内侧,过点 A 且与 C 有唯一公共点的直线只有 x 轴,故 B 正确;

对于 C,当 M 为坐标原点时,$|MF|+|MA|$取得最小值,此时$|MF|+|MA|=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$,故 C 错误;

对于 D,点 M 到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 $d=\frac{|x_0-y_0+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{y_0^2}{2}-y_0+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{1}{2}(y_0-1)^2+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}}$,故当 $y_0=1$ 时,d 取最小值$\frac{\sqrt{2}}{4}$,故 D 正确.

11. **答案** ACD

命题意图 本题考查不等关系、基本不等式.

解析 对于 A,$3=x^2+y^2+xy\geqslant 3xy$,所以 $xy\leqslant 1$.当且仅当 $x=y$ 时等号成立,故 A 正确;

对于 B,$(x+y)^2=3+xy\leqslant 3+\frac{(x+y)^2}{4}$,所以 $-2\leqslant x+y\leqslant 2$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立,故 B 错误;

对于 C,$x^2+y^2+xy=\frac{1}{4}(2x+y)^2+\frac{3}{4}y^2=3$,所以 $-2\sqrt{3}\leqslant 2x+y\leqslant 2\sqrt{3}$,当且仅当 $y=0$ 时等号成立,故 C 正确;

对于 D,$x^2+y^2-xy=3-2xy\geqslant 1$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立,故 D 正确.

12. **答案** ABD

命题意图 本题考查空间角.

解析 对于 A,当 $\alpha\perp\beta$ 时,直线 CD 与平面 β 所成角为 $\angle CDA$,则 $\sin\angle CDA=\frac{AC}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 A 正确;

对于 B,如图 1,过 A 作 $AE/\!/BD$,且 $AE=BD$,连接 ED,EC,则 $ABDE$ 为正方形,$\angle CDE$ 即为直线 AB 与 CD 所成角,$\angle CAE$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角,当 $\angle CAE=60°$时,易得 $CE=DE=1$,又 $AC\perp l,BD\perp l$,故 $l\perp$ 面 AEC,即 $DE\perp$ 面 AEC,故 $\angle CDE=45°$,故 B 正确;

对于 C,如图 2,作 $AE \underline{\underline{/\!/}} BD$,则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 $\angle CAE$,又 $CD=2$,在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中,易得 $CE=\sqrt{3}$,在 $\triangle ACE$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle CAE=-\frac{1}{2}$,$\angle CAE=120°$,过 C 点作 $CO\perp AE$ 交线段 EA 的延长线于点 O,则 $CO\perp$ 平面 $ABDE$,过 O 点作 $OH\perp BD$,交线段 DB 的延长线于点 H,连接 CH,则 $\angle CHO$ 为二面角 $C-BD-A$ 的平面角,易得$CO=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$HO=1$,$CH=\frac{\sqrt{7}}{2}$,所以 $\cos\angle CHO=\frac{OH}{CH}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,故 C 错误;

对于 D,同选项 C 可知$\angle CAE=120°$,如图 3,分别取线段 AD,AE 的中点 G,M,连接 GM,过 G 点作平面 β 的垂线,则球心 O 必在该垂线上,设球的半径为 R,则 $OE=R$,又 $\triangle ACE$ 的外接圆半径 $r=1$,则 $R^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$,所以四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$,故 D 正确.

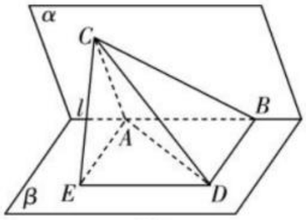


图 1

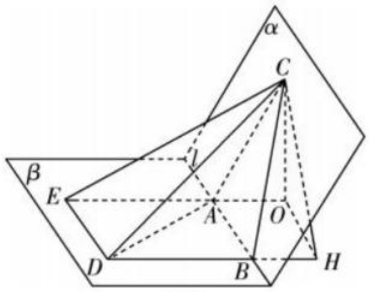


图 2

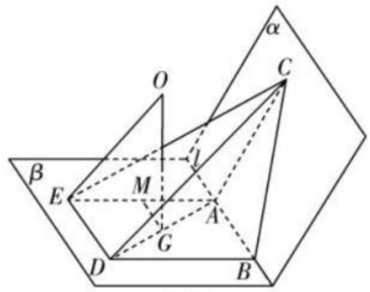


图 3

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案**　7

命题意图　本题考查二项式定理的应用.

解析　由已知得 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}=21$，解得 $n=7$(负值舍去).

14. **答案**　47(或 50)

命题意图　本题考查样本数据的数字特征.

解析　观察两组数据的特征，甲班的数据都是连续的整数，且最小的数有两个，乙班的数据除了 a 之外也都是连续的整数，要使两组样本数据的方差相等，只需两组数据的分布也相同即可，a 可以是重复的最小值或最大值.

15. **答案**　-16

命题意图　本题考查函数与数列.

解析　因为 $f'(x)=\left(\frac{1}{2}x\right)'[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_5)]+\frac{1}{2}x[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_5)]'=\frac{1}{2}[(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_5)]+\frac{1}{2}x[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_5)]'$，所以 $f'(0)=-\frac{1}{2}a_1a_2\cdots a_5$. 因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_1a_5=a_2a_4=a_3^2=4$，于是 $f'(0)=-\frac{1}{2}\times4^2\times2=-16$.

16. **答案**　4

命题意图　本题考查椭圆的方程与性质.

解析　设 $F(c,0)(c>0)$，由已知得直线 AB 的方程为 $-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，直线 CF 的方程为 $\frac{x}{c}-\frac{y}{b}=1$，两直线方程联立，可解得 P 点的坐标为 $\left(\frac{2ac}{a-c},\frac{(a+c)b}{a-c}\right)$. 由 $|PF|=3|AF|$，可得 $\left(\frac{2ac}{a-c}-c\right)^2+\frac{(a+c)^2b^2}{(a-c)^2}=9(a+c)^2$，整理得 $\frac{b^2+c^2}{(a-c)^2}=9$，即 $\frac{a^2}{(a-c)^2}=9$，解得 $a=\frac{3}{2}c$. 所以 P 点的纵坐标为 $\frac{(a+c)b}{a-c}=5b$，得 $\frac{S_{\triangle PAF}}{S_{\triangle ABF}}=5$，所以 $\frac{S_{\triangle PBF}}{S_{\triangle ABF}}=4$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查正余弦定理和三角恒等变换的应用.

解析　(Ⅰ)由条件可得 $(\sin A-4\sin B\cos B)\sin A=4\cos A\sin^2 B$，

整理得 $\sin^2 A=4\sin B(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$=4\sin B\sin(A+B)$ ………………………………………………………… (2 分)

$=4\sin B\sin C$，………………………………………………………… (3 分)

再由正弦定理可得 $a^2=4bc$. ……(5 分)

(Ⅱ)由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$, ……(6 分)

再由(Ⅰ)可得 $\dfrac{b^2+c^2-4bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$,整理得 $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}=3$. ……(8 分)

令 $\dfrac{c}{b}=t$,则 $t+\dfrac{1}{t}=3$,即 $t^2-3t+1=0$, ……(9 分)

解得 $t=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,即 $\dfrac{c}{b}$ 的值为 $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. ……(10 分)

18. **命题意图** 本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角问题.

解析 (Ⅰ)设 AB 的中点为 O,连接 CO,SO.

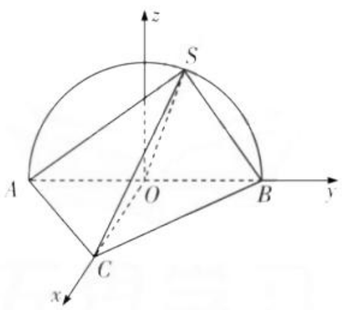
因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,且 $CA=CB=\sqrt{2}$,所以 $AB=2,CO=1$,且 $CO\perp AB$. ……(1 分)

因为 S 在以 AB 为直径的圆上,所以 $SO=\dfrac{1}{2}AB=1$. ……(2 分)

故 $SO^2+CO^2=SC^2=2$,故 $CO\perp SO$. ……(3 分)

又因为 $AB\cap SO=O$,故 $CO\perp$ 平面 SAB, ……(4 分)

因为 $CO\subset$ 平面 ABC,所以平面 $SAB\perp$ 平面 ABC. ……(5 分)



(Ⅱ)以 O 为坐标原点,OC,OB 所在直线分别为 x,y 轴,过点 O 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,则 $A(0,-1,0),C(1,0,0),B(0,1,0)$. ……(6 分)

由 $\sin\angle SAB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $\cos\angle SAB=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\sin\angle SOB=\sin 2\angle SAB=2\sin\angle SAB\cos\angle SAB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

从而得 $\cos\angle SOB=\dfrac{1}{3}$,所以 $S\left(0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. ……(7 分)

所以 $\overrightarrow{SA}=\left(0,-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,$\overrightarrow{SB}=\left(0,\dfrac{2}{3},-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,$\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$, ……(8 分)

设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{SB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x-y=0,\\ \dfrac{2}{3}y-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}z=0,\end{cases}$ ……(9 分)

不妨取 $y=\sqrt{2}$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$. ……(10 分)

因为 $|\cos\langle\overrightarrow{SA},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{SA}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

故直线 SA 与平面 SBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……(12 分)

19. **命题意图** 本题考查数列的递推关系，以及等比数列的性质.

解析 （Ⅰ）$a_n-b_n=\lambda$ 即 $b_n=a_n-\lambda$，

所以 $b_1=a_1-\lambda=1-\lambda\neq0$，……（1 分）

$b_{n+1}=a_{n+1}-\lambda=a_n+b_n-\lambda=(a_n-\lambda)+b_n=2b_n$，……（4 分）

所以数列$\{b_n\}$是以 $1-\lambda$ 为首项，2 为公比的等比数列. ……（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b_n=(1-\lambda)\cdot2^{n-1}$，所以 $a_n=b_n+\lambda=(1-\lambda)\cdot2^{n-1}+\lambda$. ……（6 分）

因为当 $n=3$ 和 $n=4$ 时，数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 取得最大值，所以 $a_4=0$，……（7 分）

即 $8(1-\lambda)+\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{8}{7}$. ……（8 分）

所以 $a_n=\frac{8}{7}-\frac{1}{7}\times2^{n-1}$. ……（9 分）

经检验，当 $n\leqslant3$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant5$ 时，$a_n<0$，所以 S_n 先增后减，在 $n=3$ 和 $n=4$ 时取得最大值，符合题意.

……（10 分）

此时 $S_n=\frac{8}{7}n-\frac{1}{7}(1+2+\cdots+2^{n-1})=\frac{8}{7}n-\frac{1}{7}\cdot\frac{1-2^n}{1-2}=\frac{8}{7}n-\frac{1}{7}(2^n-1)$. ……（12 分）

20. **命题意图** 本题考查概率与条件概率，数学期望的应用.

解析 （Ⅰ）设事件“该 4S 店一名销售员的绩效工资大于 $0.4t$”为 A，则事件 A 等价于“该销售员月售车台数不小于 3”，$P(A)=0.12+0.09+0.06=0.27$. ……（3 分）

（Ⅱ）设事件“该 4S 店一名销售员上个月工资大于 $1.2t$”为 B，事件“该销售员上个月卖出去 3 台车”为 C，

则 $P(BC)=P(C)=0.12$，……（4 分）

$P(B)=0.13+0.12+0.09+0.06=0.4$，……（5 分）

故 $P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=0.3$. ……（7 分）

（Ⅲ）该 4S 店一名销售员月工资 X 的分布列为

X	t	$1.1t$	$1.3t$	$1.5t$	$1.8t$	$2.2t$
P	0.32	0.28	0.13	0.12	0.09	0.06

……（9 分）

所以 $E(X)=0.32t+0.28\times1.1t+0.13\times1.3t+0.12\times1.5t+0.09\times1.8t+0.06\times2.2t=1.271t$，……（10 分）

由 $1.271t\geqslant8\,000$，得 $t\geqslant6\,300$，

即基础工资至少应定为 6 300 元. ……（12 分）

21. **命题意图** 本题考查导数的几何意义，利用导数研究函数性质，证明不等式.

解析 （Ⅰ）由已知得 $f'(x)=1-\frac{2}{x}(x>0)$，……（1 分）

所以 $f'(1)=-1$，又 $f(1)=0$，……（2 分）

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$. ……（4 分）

（Ⅱ）由题意知 $F(x)=x^2-2x\ln x-x$，则 $F'(x)=2x-2\ln x-3$，……（5 分）

令 $g(x)=F'(x)$，则 $g'(x)=2-\frac{2}{x}(x>0)$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$F'(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$F'(x)$ 单调递增. ……（6 分）

因为 $F'\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{2}{e^2}+1>0, F'(1)=-1<0, F'(e)=2e-5>0$,

所以 $F'(x)$ 有两个零点 x_1, x_2, 且 $x_1\in\left(\frac{1}{e^2},1\right), x_2\in(1,e)$. …………(7 分)

当 $x\in(0,x_1)$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增, 当 $x\in(x_1,x_2)$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减, 当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增, 即 x_2 是 $F(x)$ 唯一极小值点. …………(8 分)

所以 $M=F(x_2)<F(e)=e^2-3e$. …………(9 分)

由 $F'(x_2)=0$ 得 $2\ln x_2=2x_2-3$, 所以 $F(x_2)=x_2^2-x_2-x_2(2x_2-3)=2x_2-x_2^2$, …………(10 分)

设函数 $u(x)=2x-x^2$, 易知 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减, …………(11 分)

所以 $M=F(x_2)=u(x_2)>u(e)=2e-e^2$.

综上, $2e-e^2<M<e^2-3e$. …………(12 分)

22. **命题意图** 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 (Ⅰ)因为 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$, 所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$. ① …………(1 分)

设 $F(c,0)(c>0)$, 直线 AB 的方程为 $x=c$,

将其代入 C 的方程得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$, 所以 $|AB|=\frac{2b^2}{a}=6$. ② …………(3 分)

由①②可解得 $a=1, b=\sqrt{3}$, …………(4 分)

所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. …………(5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $a=1, b=\sqrt{3}$, 所以 l 的方程为 $x_0x-\frac{y_0y}{3}=1$,

因为 l 与直线 AB 相交, 故 $y_0\neq0$, 方程整理为 $y=\frac{3x_0x-3}{y_0}$. …………(6 分)

直线 AB 的方程为 $x=2$, 所以 l 与直线 AB 的交点为 $M\left(2,\frac{6x_0-3}{y_0}\right)$,

l 与直线 $x=t(t\neq2)$ 的交点为 $N\left(t,\frac{3tx_0-3}{y_0}\right)$, …………(7 分)

则 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{9(2x_0-1)^2}{(t-2)^2y_0^2+9(tx_0-1)^2}$. …………(8 分)

因为 $P(x_0,y_0)$ 在 C 上, 所以 $x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1$, 即 $y_0^2=3(x_0^2-1)$,

所以 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{9(2x_0-1)^2}{3(t-2)^2(x_0^2-1)+9(tx_0-1)^2}=\frac{12x_0^2-12x_0+3}{4(t^2-t+1)x_0^2-6tx_0-t^2+4t-1}$. …………(9 分)

由题意知: 当 x_0 变化时上式为定值, 则分子、分母中对应项的系数成比例,

则 $4(t^2-t+1)=6t$, 解得 $t=\frac{1}{2}$ ($t=2$ 舍去), …………(11 分)

此时 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{12x_0^2-12x_0+3}{3x_0^2-3x_0+\frac{3}{4}}=4$, 即 $\frac{|MF|}{|NF|}=2$,

因此, 存在 $t=\frac{1}{2}$ 符合条件. …………(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。