重庆八中 2021-2022 学年度高三（上）入学摸底测试

数学试题

命题：张新、王虎军　审题：张新　打印：王虎军　校对：张新

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x<10\}$，则 $A\cap B=($　　$)$.

A．$\{3,9\}$　　B．$\{1,3,9\}$　　C．$\{2,4,5,6,7,8\}$　　D．$\{x|0<x<10\}$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}f(x+1),x\le 0\\ 1-\log_2 x,x>0\end{cases}$，则 $f(f(8))=($　　$)$.

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

3．已知函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，则函数 $F(x)=f(x+2)+\sqrt{3-x}$ 定义域为(　　).

A．$(-2,3]$　　B．$[-2,3]$　　C．$(0,3]$　　D．$(0,3)$

4．直线 $y=9x+b$ 是曲线 $y=x^3+6x+3$ 的一条切线，则实数 $b=($　　$)$.

A．-4 或 3　　B．1 或 5　　C．-4　　D．5

5．设 $a=6^{0.6},b=0.6^6,c=\log_6 0.6$，则 a,b,c 的大小关系是(

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

6．已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=0$，当 $x>0$ 时，$2xf(x)+x^2f'(x)>0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是(　　).

A．$(-\infty,-2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-2,0)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

若对任意的正实数 x，不等式 $xa\le e^x+2x^2+2$ 恒成立，则实数 a 的最大值是(　　).

A．$e+4$　　B．$e+3$　　C．$e+2$　　D．$e+1$

8．设实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(1,+\infty)$，不等式 $e^{3\lambda x}-\dfrac{\ln x}{3\lambda}\ge 0$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是(　　).

A．$\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$　　B．$\left[\dfrac{1}{3e},+\infty\right)$　　C．$[e,+\infty)$　　D．$[3e,+\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列命题中，正确的命题有(　　).

A．函数 $f(x)=x$ 与 $g(t)=\sqrt[3]{t^3}$ 是同一个函数

B．命题“$\forall x<0,2^x<1$”的否定为“$\exists x_0\ge 0,2^{x_0}\ge 1$”

C．$\log_2 27\cdot\log_3 25\cdot\log_5 4=12$

D．已知 $x\in\mathbf{R}$，则“$x>0$”是“$|x-1|<1$”的充分不必要条件

10 悬链线是平面曲线，是柔性链条或缆索两端固定在两根支柱顶部，中间自然下垂所形成的外形，在工程中（如悬索桥、双曲拱桥、架空电缆）有广泛的应用．当微积分尚未出现时，伽利略猜测这种形状是抛物线，直到 1691 年莱布尼兹和伯努利利用微积分推导出悬链线的方程 $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$

其中 c 为参数．当 $c=1$ 时，我们可构造出双曲函数：双曲正弦函数 $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$．关于双曲函数，下列结论正确的是(　　).

A．$y=\sinh x\cdot\cosh x$ 是偶函数　　B．$(\cosh(x))'=-\sinh(x)$

C．$\cosh(-1)<\cosh(2)$　　D．$[\sinh(x)]^2-[\cosh(x)]^2=1$

11．设函数 $f(x)=x\cdot\ln x$，则关于 x 的方程 $|f(x)|=m$ 的实数根的个数可能为(　　).

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

12．已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x-7}{e^x}$，则下列结论正确的是(　　).

A．函数 $f(x)$ 有极小值

B．函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $9y-x+1=0$ 垂直

C．若 $f(x)=k$ 有三个实根，则 k 的取值范围为 $(-4e^2,\frac{8}{e^3})$

D．若 $x\in[0,t]$ 时，$f_{\max}(x)=\frac{8}{e^3}$，则 t 的最小值为 3

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填写在答题卡相应位置上．

13．函数 $y=\log_3\left(-x^2+5x+6\right)$ 的单调递增区间是____________.

14．若函数 $f(x)=ax^3+2ax^2+x-3$ 不存在极值点，则 a 的取值范围是____________.

15．若函数 $f(x+3)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递减，则满足 $f(2x+3)<f(x+6)$ 的 x 的解集是____________.

16．已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+2k(\ln x-x)$，若函数 $f(x)$ 有唯一极值点，则实数 k 的取值范围是____________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）已知 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sqrt{3}\cos A(c\cdot\cos B+b\cdot\cos C)=a\cdot\sin A$．

（1）求角 A；

（2）若 $a=1$，$b+c=\sqrt{7}$，求 ΔABC 的面积．

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=\dfrac{2n-1}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

19.（本小题满分 12 分）

某中学校为了判断学生对几何题和代数题的感兴趣程度是否与性别有关，在校内组织了一次几何题与代数题选答测试，现从所有参赛学生中随机抽取 100 人，对这 100 名学生选答几何题与代数题的情况进行了统计，其中男同学 40 人，女同学 60 人，所得统计数据（单位：人）如下表所示：

	代数题	几何题	总计
男生	5		
女生		40	
总计			

（1）请将题中表格补充完整，并判断能否有 99%的把握认为“学生是否选择几何题和代数题与性别有关”；

（2）该中学校多次组织学生作答几何题与代数题，据以往经验，参赛学生做对代数题的概率为$\dfrac{4}{5}$，做对几何题的概率为$\dfrac{3}{4}$，且做对代数题与几何题相互独立．该学校再次组织了一次测试活动，测试只有三道试题，一道代数题，两道几何题，规定参赛学生必须三道试题都要作答．用ξ表示某参赛学生在这次测试中做对试题的个数，求随机变量ξ的分布列和数学期望.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$；

临界值表供参考：

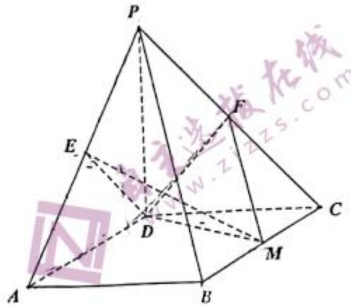
$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，ΔPAD 是斜边 PA 的长为 $2\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形，E,F 分别是棱 PA，PC 的中点，M 是棱 BC 上一点．

（1）求证：平面 $DEM\perp$ 平面 PAB；

（2）若直线 MF 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，求锐二面角 $E-DM-F$ 的余弦值．



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，长轴端点和短轴端点的距离为 $\sqrt{5}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 P 为椭圆 C 上异于椭圆 C 端点的任意一点，过点 $Q(0,-2)$ 且平行于 OP 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点（点 O 为坐标原点），是否存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\lambda\cdot\overrightarrow{OP}^2$ 成立？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由．

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2-2ax+2\ln x(a>0)$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=\ln x-bx-cx^2$，若函数 $f(x)$ 的两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 恰为函数 $g(x)$ 的两个零点，且 $y=(x_1-x_2)g'(\frac{x_1+x_2}{2})$ 的取值范围是 $[\ln 3-1,+\infty)$，求实数 a 的取值范围．

重庆八中 2021-2022 学年度高三（上）入学摸底测试

数学试题参考答案

命题：张新、王虎军　审题：张新　打印：王虎军　校对：张新

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	B	D	A	B	A	C	A	B	AC	ABD	BCD	AD

1. B　【详解】由题意，$A=\{1,3,3^2,\cdots\}$，故 $A\cap B=\{1,3,9\}$，故选 B.

2. D　【详解】$f(8)=1-\log_2 8=-2,\therefore f(f(8))=f(-2)=f(-1)=f(0)=f(1)=1-\log_2 1=1$

3. A　【详解】函数 $F(x)=f(x+2)+\sqrt{3-x}$ 需满足 $\begin{cases}x+2>0\\3-x\geq 0\end{cases}$，解得 $-2<x\leq 3$.

4. B　【详解】令 $y'=3x^2+6=9$，解得 $x=\pm 1$，故切点为 $(1,10)$ 或 $(-1,-4)$，而 $b=y-9x$，所以 $b=10-9=1$ 或 $b=-4+9=5$．故选 B

5. A　【详解】$a=6^{0.6}>6^0=1, 0<b=0.6^6<0.6^0=1, c=\log_6 0.6<\log_6 1=0$，所以 $a>b>c$．选 A.

6. C　【详解】设 $g(x)=x^2\cdot f(x)$，$g'(x)=x^2\cdot f'(x)+2x\cdot f(x)$，由条件可知当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $g(x)$ 也是奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 单增，因为 $f(2)=0$，所以 $g(-2)=g(2)=0$，所以函数 $g(x)\geq 0$ 的解集是 $(-2,0)\cup(2,+\infty)$，而 $x^2f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>0$，$f(x)$ 是 R 上的奇函数，$f(0)=0$，所以 $f(x)>0$ 的解集是 $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

7. A　【详解】分离参数得：$a\leq\dfrac{e^x+2x^2+2}{x}=\dfrac{e^x}{x}+2x+\dfrac{2}{x}$ 对于任意 $x>0$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}+2x+\dfrac{2}{x}\ (x>0)$，则 $a\leq g(x)_{\min}$，则 $g'(x)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}+2-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+2x^2-2}{x^2}=\dfrac{(x-1)(e^x+2x+2)}{x^2}$；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}+x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e+2+2=e+4$，所以 $a\leq e+4$，所以实数 a 的最大值是 $e+4$，故选 A.

8. B　【详解】因为 $\lambda>0$，不等式 $e^{3\lambda x}-\dfrac{\ln x}{3\lambda}\geq 0$ 成立，即 $3\lambda e^{3\lambda x}\geq\ln x$，转化为 $3\lambda xe^{3\lambda x}\geq x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$ 恒成立，构造函数 $g(x)=xe^x(x>0)$，可得 $g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，当 $x>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单增，则不等式 $e^{3\lambda x}-\dfrac{\ln x}{3\lambda}\geq 0$ 恒成立等价于 $g(3\lambda x)\geq g(\ln x)$ 恒成立，即 $3\lambda x\geq\ln x$ 恒成立，进而转化为 $3\lambda\geq\dfrac{\ln x}{x}$ 恒成立；设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，可得 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以当 $x=e$，函数 $h(x)$ 取得最大值 $h(e)=\dfrac{1}{e}$，所以 $3\lambda\geq\dfrac{1}{e}$，即实数 λ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3e},+\infty\right)$．故选 B.

9. AC　【详解】$f(x)=x$ 和 $g(t)=\sqrt[3]{t^3}=t$ 定义域都为 R，对应关系相同，两个函数是同一个函数，A 正确；对于 B，全称命题"$\forall x<0, 2^x<1$"的否定为"$\exists x_0<0, 2^{x_0}\geq 1$"，故 B 错误；
对于 C，$\log_2 27\cdot\log_3 25\cdot\log_5 8=18\cdot\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2=18\cdot\log_2 5\cdot\log_5 2=18$，故 C 正确；
对于 D，由 $|x-1|<1$，得 $0<x<2$，因为当 $0<x<2$ 时，$x>0$ 一定成立，而 $x>0$ 时，不一定有 $0<x<2$，所以"$x>0$"是"$|x-1|<1$"的必要不充分条件，所以 D 错误.

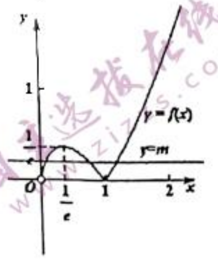
10. ABD　【详解】因双曲正弦函数 $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 是奇函数，双曲余弦函数 $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是

偶函数，因此$y=\sinh x\cdot\cosh x$是奇函数，A 错误；$(\cosh(x))'=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh(x)$，B 错误；

双曲余弦函数$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$是偶函数，且在$(0,+\infty)$递增，$\cosh(-1)=\cosh(1)<\cosh(2)$，C 正确；

对于 D，$[\sinh(x)]^2-[\cosh(x)]^2=(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2-(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2=-1$，D 错误. 因此，说法错误的是 ABD.

11. BCD 【详解】$f'(x)=\ln x+1$，由$f'(x)>0\Rightarrow x>\frac{1}{e}$，$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{e}$，即函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增；当$x\to 0$时，$f(x)\to 0$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$，$f(1)=0$，则函数$y=|f(x)|$与$y=m$的图象如下图所示，平移直线$y=m$可知，函数$y=|f(x)|$与$y=m$的交点个数可能为0,1,2,3，则关于$x$的方程$|f(x)|=m$的实数根的个数可能为0,1,2,3，故选 BCD.



12. AD 【详解】由已知$f'(x)=\frac{(2x+2)e^x-(x^2+2x-7)e^x}{e^{2x}}=\frac{9-x^2}{e^x}$，$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 3$，当$x<-3$或$x>3$时，$f'(x)<0$，$-3<x<3$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,-3)$和$(3,+\infty)$上递减，在$(-3,3)$上递增，$f(x)$极小值$=f(-3)=-4e^3$，$f(x)$极大值$=f(3)=\frac{8}{e^3}$，A 正确；切线斜率$k_1=f'(0)=9$，直线$9y-x+1=0$斜率$k_2=\frac{1}{9}$，$k_1k_2\neq -1$，两直线不垂直，B 错误；$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$时，$f(x)\to 0$，若$f(x)=k$有三个实根，则$k\in(0,\frac{8}{e^3})$；当$-4e^2<k\leq 0$时，$f(x)=k$只有两个根，C 错误；若$x\in[0,t]$时，$f_{\max}(x)=\frac{8}{e^3}$，则$t\geq 3$，$t$的最小值为 3，D 正确. 故选 AD.

三、填空题

13. $(-1,\frac{5}{2}]$ 【详解】由$-x^2+5x+6>0$得$-1<x<6$. 设$u(x)=-x^2+5x+6=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{49}{4}(-1<x<6)$，则$u(x)$在区间$(-1,\frac{5}{2}]$上单调递增，在区间$[\frac{5}{2},6)$上单调递减. 又$y=\log_3 x$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以函数$y=\log_3(-x^2+5x+6)$的单调递增区间是$(-1,\frac{5}{2}]$. 故答案为$(-1,\frac{5}{2}]$，写成$(-1,\frac{5}{2})$亦可.

14. $[0,\frac{3}{4}]$ 【详解】$\because f(x)=ax^3+2ax^2+x-3\ \therefore f'(x)=3ax^2+4ax+1$若$a=0$，则$f'(x)=1>0$恒成立，$f(x)$在$R$上为增函数，满足条件；若$a\neq 0$，则$\Delta=16a^2-12a\leqslant 0$时，即$0<a\leqslant\frac{3}{4}$时，$f'(x)\geqslant 0$恒成立，$f(x)$在$R$上为增函数，满足条件；综上可得$0\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$，即$a\in\left[0,\frac{3}{4}\right]$.

15. $(-1,3)$ 【详解】由$f(x+3)$是偶函数知$f(x)$关于$x=3$对称；由$f(x)$在$(-\infty,3]$上单调递减知：$f(x)$在$[3,+\infty)$上单调递增. 由$f(2x+3)<f(x+6)$知：$|2x+3-3|<|x+6-3|$，即$4x^2<(x+3)^2$，解得$-1<x<3$，故解集为$(-1,3)$.

16. $\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$ 【详解】由题意知，函数$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{2k(1-x)}{x}=\frac{(e^x-2kx)(x-1)}{x^2}$，因为函数$f(x)$有唯一极值点，所以$x=1$是函数$f(x)$的唯一极值点，所以$e^x-2kx=0$在$(0,+\infty)$无变号零点，令$g(x)=e^x-2kx$，则$g'(x)=e^x-2k$，

当$k\leq 0$时，$g'(x)=e^x-2k>0$恒成立，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，且$g(0)=1$，所以$g(x)=0$在$(0,+\infty)$上无解，符合要求；当$k>0$时，$g'(x)=e^x-2k=0$有解，且$x=\ln(2k)$，又因为$0<x<\ln(2k)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,\ln(2k))$上单调递减；$x>\ln(2k)$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(\ln(2k),+\infty)$上

单调递增，所以$g(x)_{\min}=e^{\ln(2k)}-2k\ln(2k)=2k-2k\ln(2k)>0$，解得$0<k<\frac{e}{2}$，当$k=\frac{e}{2}$时，作出函数$y=e^x$和$y=ex$的图象可知它们相切于点$(1,e)$，所以符合条件，综上所述：$k\le\frac{e}{2}$，故答案为$\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：（1）由正弦定理得：$\sqrt{3}\cos A(\sin C\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos C)=\sin A\cdot\sin A$

所以$\sqrt{3}\cos A\cdot\sin(B+C)=\sin A\cdot\sin A$，所以$\sqrt{3}\cos A\cdot\sin A=\sin A\cdot\sin A$

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A>0$，所以$\tan A=\sqrt{3}$，所以$A=\frac{\pi}{3}$． ……5 分

（2）由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，又因为$A=\frac{\pi}{3}$，$a=1$

所以$1=b^2+c^2-bc\Rightarrow(b+c)^2=1+3bc$，又因为$b+c=\sqrt{7}$

所以$bc=2$，所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ……10 分

18．解：（1）当$n=1$时，$S_1=2a_1-1$，解得$a_1=1$

当$n\ge2$时，$\begin{cases}S_n=2a_n-1\\S_{n-1}=2a_{n-1}-1\end{cases}\Rightarrow a_n=2a_n-2a_{n-1}\Rightarrow a_n=2a_{n-1}$

所以$\{a_n\}$是以$a_1=1$为首相，公比$q=2$的等比数列，所以$a_n=2^{n-1}$ ……6 分

（2）$b_n=\frac{2n-1}{a_n}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$．$\therefore T_n=1+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\dots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

$\therefore\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$

$\therefore\frac{1}{2}T_n=1+\frac{2}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\dots+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$　　$\therefore T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$ ……12 分

19．解：（1）

	成绩优秀	成绩一般	总计
男生	5	35	40
女生	20	40	60
总计	25	75	100

因为$K^2=\frac{100(5\times40-20\times35)^2}{25\times75\times40\times60}=\frac{50}{9}\approx5.556<6.635$．

所以没有 99%的把握认为在本次测试中“学生是否选择几何题和代数题与性别有关” ………6 分

（2）随机变量ξ的所有可能值为 0,1,2,3，则有：

$P(\xi=0)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{80}$，$P(\xi=1)=\frac{4}{5}\times(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{5}C_2^1\frac{13}{44}=\frac{1}{8}$，

$P(\xi=2)=\frac{4}{5}\times C_2^1\frac{13}{44}+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{33}{80}$，$P(\xi=3)=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{20}$．

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{33}{80}$	$\frac{9}{20}$

所以$E(\xi)=0\times\frac{1}{80}+1\times\frac{10}{80}+2\times\frac{33}{80}+3\times\frac{36}{80}=\frac{23}{10}$ ……….12 分

20. 解：(1) 依题意可得：$PD\perp DA$，$DP=DA=DC=2$.

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=DA$，$AB\perp DA$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

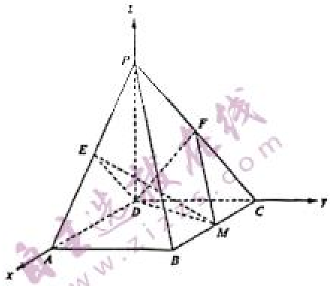
$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，$\therefore AB\perp DE$.

在 $Rt\Delta PAD$ 中，$DP=DA$，E 是棱 PA 的中点，所以 $PA\perp DE$.

又 $PA\cap AB=A$, $PA,AB\subset$ 平面 PAD，$\therefore DE\perp$ 平面 PAB.

又 $DE\subset$ 平面 DEM，$\therefore$ 平面 $DEM\perp$ 平面 PAB. ………6 分

(2) 如图，取 CD 的中点 N， 连接 MN，NF，



则 $NF//PD, NF=\frac{1}{2}PD=1$

由 (1) 知 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore NF\perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore\angle FMN$ 是直线 MF 与平面 $ABCD$ 所成角

$\therefore \tan\angle FMN=\frac{1}{MN}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore MN=\sqrt{2}$，$\therefore MC=\sqrt{MN^2-NC^2}=1$

$\therefore M$ 是棱 BC 的中点（或向量法由线面角解出点 M 坐标）

以 D 为坐标原点，DA，DC，DP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

则有：$D(0,0,0),E(1,0,1),F(0,1,1),M(1,2,0)$

$\therefore \overrightarrow{DE}=(1,0,1),\overrightarrow{DF}=(0,1,1),\overrightarrow{DM}=(1,2,0)$

设平面 EDM 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，平面 DMF 的法向量为 $n=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}0=\overrightarrow{DE}\bullet\vec{m}=a+c\\0=\overrightarrow{DM}\bullet\vec{m}=a+2b\end{cases}$，令 $a=-2$，则 $\vec{m}=(-2,1,2)$

有 $\begin{cases}0=\overrightarrow{DF}\bullet\vec{m}=y+z\\0=\overrightarrow{DM}\bullet\vec{m}=x+2y\end{cases}$，令 $x=-2$，则 $\vec{n}=(-2,1,-1)$

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\bullet\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3}{3\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\therefore$ 锐二面角 $E-DM-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ………12 分

21. 解：(1) 依题意得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}=e=\frac{c}{a}\\\sqrt{5}=\sqrt{a^2+b^2}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\\c^2=3\end{cases}$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ………5 分

(2) 因为 P 是椭圆 C 上异于椭圆 C 端点的任意一点，且 $l//OP$，故直线 l 的斜率存在.

设过点 $Q(0,-2)$ 的直线 l：$y=kx-2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=kx-2\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，消去 y 并整理，得 $(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$.

$\Rightarrow\begin{cases}\Delta=(-16k)^2-4\times12\times(1+4k^2)>0\Rightarrow4k^2>3\\x_1+x_2=\frac{16k}{1+4k^2}\\x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}\end{cases}$ …………7 分

$\Rightarrow |QA|\cdot|QB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_Q|\cdot\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_Q|=(1+k^2)|x_1\cdot x_2|$（注：$x_Q=0$） …………8 分

由 $\begin{cases} l_{OP}:\ y=kx \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow (1+4k^2)x^2=4 \Rightarrow x_P^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$

$\Rightarrow |OP|^2=(\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_O|)^2=(1+k^2)(x_P)^2=(1+k^2)\dfrac{4}{1+4k^2}$ …………10 分

又因为 $\overline{QA}\cdot\overline{QB}=\lambda\cdot\overline{OP}^2 \Rightarrow |QA|\cdot|QB|=\lambda|OP|^2 \Rightarrow |x_1\cdot x_2|=\lambda x_P^2$（此处可以用向量翻译得到）

$\Rightarrow \left|\dfrac{12}{1+4k^2}\right|=\lambda\dfrac{4}{1+4k^2} \Rightarrow \lambda=3$.

综上，存在实数 λ，使得 $\overline{QA}\cdot\overline{QB}=\lambda\cdot\overline{OP}^2$ 成立，且 $\lambda=3$. …………12 分

22. 解：（1）$f(x)=x^2-2ax+2\ln x(a>0)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x-2a+\dfrac{2}{x}=2\cdot\dfrac{x^2-ax+1}{x}\ (a>0,x>0)$.

对于方程 $y=x^2-ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4\ (a>0)$ 分类讨论

（i）若 $\Delta=a^2-4\le 0$，即 $0<a\le 2$ 时，则 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（ii）若 $\Delta=a^2-4>0$，即 $a>2$ 时，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$.

所以：当 $0<a\le 2$ 时，$f(x)$ 单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 和 $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$；

单调递减区间为 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$. ……5 分

（2）由（1）知：$a>2$ 且 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=1$.（$x_1<x_2$）

又 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-b-2cx$（$x>0$），$\therefore g'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{2}{x_1+x_2}-b-c(x_1+x_2)$，

由 $g(x_1)=g(x_2)=0$ 得：$\begin{cases} \ln x_1-bx_1-cx_1^2=0 \\ \ln x_2-bx_2-cx_2^2=0 \end{cases}$

两式相减，得 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}=b(x_1-x_2)+c(x_1^2-x_2^2)$.　　$(x_1<x_2)$

$\therefore y=(x_1-x_2)g'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-b(x_1-x_2)-c(x_1^2-x_2^2)=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}-\ln\dfrac{x_1}{x_2}$.

令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t\in(0,1)$，$\therefore y=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$，$\therefore y'=\dfrac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，

所以 $y=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$ 在（0，1）上单调递减，

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。