

华中师大一附中 2019—2020 学年度上学期期中检测  
高三年级数学（理科）试题

一、选择题：(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。)

1. 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x | (1-x)(x+2) > 0\}$ , 则  $A \cap B$  的子集个数为 ( )

- A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8

2. 设命题  $p: \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ , 则  $\neg p$  为 ( )

- A.  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$                       B.  $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$   
C.  $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$                       D.  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$

3. 若复数  $z$  满足  $(3-4i)z = 11+2i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z$  的虚部为 ( )

- A. -2                      B. 2                      C.  $-2i$                       D.  $2i$

4. 我国古代数学典籍《九章算术》第七章“盈不足”章中有一道“两鼠穿墙”问题：有厚墙 5 尺，两只老鼠从墙的两边相对分别打洞穿墙，大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也进一尺，以后每天减半。问两鼠在第几天相遇？ ( )

- A. 第 2 天                      B. 第 3 天                      C. 第 4 天                      D. 第 5 天

5. 已知变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \leq 3 \\ x - 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的最小值为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 6

6. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_{12} > 0, S_{13} < 0$ , 且  $\{S_n\}$  的最大项为  $S_m$ ,  $a_{m+1} = 2$ ,

则  $S_{13} =$  ( )

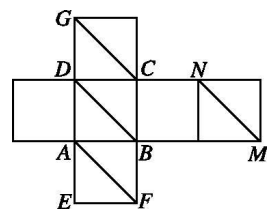
- A. 20                      B. 22                      C. 24                      D. 26

7. 右图为一正方体的平面展开图，在这个正方体中，有以下结论

- ①  $AN \perp GC$                       ②  $CF$  与  $EN$  所成的角为  $60^\circ$   
③  $BD \parallel MN$                       ④ 二面角  $E-BC-N$  的大小为  $45^\circ$

其中正确的个数是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4



8. 已知  $\triangle ABC$  中,  $\overline{AD} = 2\overline{DC}$ ,  $E$  为  $BD$  中点, 若  $\overline{BC} = \lambda \overline{AE} + \mu \overline{AB}$ , 则  $\lambda - 2\mu$  的值为 ( )

- A. 2                      B. 6                      C. 8                      D. 10

9. 若  $a = \log_{\frac{1}{16}} \frac{4}{9}$ ,  $b = \log_3 \frac{3}{2}$ ,  $c = 0.6^{0.2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

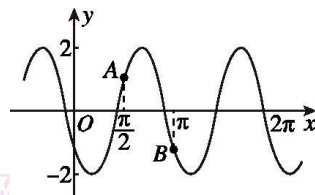
- A.  $c > b > a$                       B.  $c > a > b$                       C.  $b > a > c$                       D.  $a > b > c$

专注名校多元录取

10. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \pi$ ) 的部分图像如右图

所示, 且  $A(\frac{\pi}{2}, 1), B(\pi, -1)$ , 则  $\varphi$  的值为 ( )

- A.  $\frac{5\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{6}$   
C.  $-\frac{5\pi}{6}$                       D.  $-\frac{\pi}{6}$



11. 已知函数  $f(x) = \ln(x^2 - 1) + 2^x + 2^{-x}$ , 则使不等式  $f(x+1) < f(2x)$  成立的  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$                       B.  $(1, +\infty)$   
C.  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$                       D.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

12. 已知函数  $f(x) = x \sin x + \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ , 若对于任意的  $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}), (x_1 \neq x_2)$ , 均有

$|f(x_1) - f(x_2)| < a |e^{x_1} - e^{x_2}|$  成立, 则实数  $a$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{2}{3}$                       B. 1                      C.  $\frac{3}{2}$                       D. 3

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 曲线  $y = xe^{-x}$  在点  $(1, \frac{1}{e})$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

14. 已知  $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + 2\cos(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ , 则  $\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $c = 1$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{a^2 + b^2 - 1}{4}$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为\_\_\_\_\_.

16. 已知  $\triangle ABC$  的外接圆圆心为  $O$ ,  $|AB| = 6, |AC| = 8$ ,  $\vec{AO} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ , 若  $\sin^2 A \cdot (t\alpha + \beta - \frac{1}{2})$  ( $t$  为实数) 有最小值, 则参数  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2c}$

- (1) 求角  $C$ ;  
(2)  $BM$  平分角  $B$  交  $AC$  于点  $M$ , 且  $BM = 1, c = 6$ , 求  $\cos \angle ABM$ .

18. (本小题满分 12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{S_n}{n^2} = a_n + \frac{1}{n} - 1, n \in \mathbb{N}^*$

(1) 证明: 数列  $\{\frac{n+1}{n}S_n\}$  为等差数列;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{n}{S_n \cdot S_{n+1} \cdot 2^n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

19. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = (\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) + 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

(1) 求函数  $f(x)$  的最大值并指出  $f(x)$  取最大值时  $x$  的取值集合;

(2) 若  $\alpha, \beta$  为锐角,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{12}{13}, f(\beta) = \frac{6}{5}$ , 求  $f(\alpha + \frac{\pi}{6})$  的值.

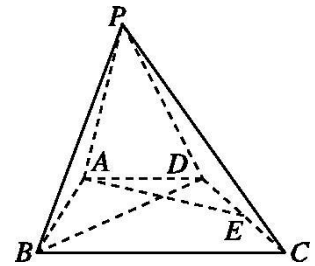
20. (本小题满分 12 分) 已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是直角梯形,  $AD \parallel BC, AB \perp BC$ ,

$AB = \sqrt{3}, BC = 2AD = 2, E$  为  $CD$  的中点,  $PB \perp AE$

(1) 证明: 平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 若  $PB = PD$ ,  $PC$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\frac{\pi}{4}$ , 试问 “在侧面  $PCD$  内是否存在一

点  $N$ , 使得  $BN \perp$  平面  $PCD$ ?” 若存在, 求出点  $N$  到平面  $ABCD$  的距离; 若不存在, 请说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

(1) 已知  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2}$ , 证明: 当  $x \geq 2$  时,  $x^2 \ln x + 1 \geq (\ln 2 + \frac{1}{4})x^2$ ;

(2) 证明: 当  $a \in (-2 - \frac{1}{e^4}, -1 - \frac{1}{e^2})$  时,  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 \ln x + \frac{3a-1}{9}x^3 + x (x \geq \sqrt{2})$  有最小值,

记

$g(x)$  最小值为  $\varphi(a)$ , 求  $\varphi(a)$  的值域.

22. (本小题满分 10 分) 已知函数  $f(x) = |x - 2| + |2x + 4|$

(1) 解不等式  $f(x) \geq -3x + 4$ ;

(2) 若函数  $f(x)$  最小值为  $a$ , 且  $2m + n = a (m > 0, n > 0)$ , 求  $\frac{2}{m+1} + \frac{1}{n}$  的最小值.

自主招生在线创立于 2014 年, 致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主招生在线**官方微信号: **zizzsw**。



识别二维码, 快速关注

**温馨提示:**

**全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案** (更新下载中), 点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>