姓名________ 座位号____________________

(在此卷上答题无效)

数 学

本试卷共4页,22题。全卷满分150分,考试时间120分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

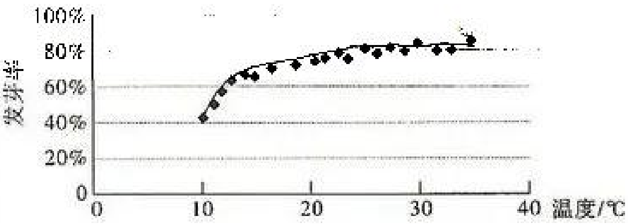
1. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$, $N=\{x\mid 0<x<2\}$, 则 $M\cup N=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $(0,2)$　　D. $[0,2]$

2. 已知复数 $z=1-i+\dfrac{a}{1-i}$ 为纯虚数,则实数 $a=$

A. $a=-1$　　B. $a=1$　　C. $a=-2$　　D. $a=2$

3. 某农科院学生为研究某花卉种子的发芽率 y 和温度 x(单位:℃)的关系,在20个不同的温度条件下进行种子发芽实验,由实验数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$ 得到下面的散点图. 由此散点图,在10℃至40℃之间,下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是



A. $y=ax+b$　　B. $y=ax^2+b$　　C. $y=a\ln x+b$　　D. $y=a\cdot e^x+b$

4. 设抛物线 $y=\dfrac{1}{12}x^2$ 上一点 P 到 x 轴的距离是1,则点 P 到该抛物线焦点的距离是

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 13

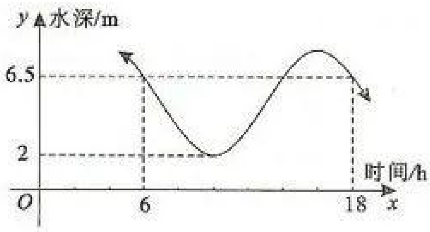
5. 某小区因疫情需求,物业把招募的5名志愿者中分配到3处核酸采样点,每处采样点至少分配一名,则不同的分配方法共有

A. 150种　　B. 180种　　C. 200种　　D. 280种

6. 设直线 $mx+ny+1=0(m>0,n>0)$ 经过点 $(-2,-1)$,则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}$ 的最小值为

A. 16　　B. 8　　C. 4　　D. 2

7. 如图，某港口一天从 6 时到 18 时的水深曲线近似满足函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+5\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. 据此可知当天 12 时的水深为



A. 3.5　　B. 4

C. $5-\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $5-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

8. 已知直线 $l:3x+4y+m=0(m>0)$ 被圆 $C:x^2+y^2+2x-2y-6=0$ 所截的弦长是圆心 C 到直线 l 的距离的 2 倍，则 $m=$

A. 6　　B. 8　　C. 9　　D. 11

9. 在棱长均等的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

10. 已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x+2)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2x^2$，则 $f(7)=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

11. 已知球 O 的半径为 3，其内接圆柱的体积最大值为

A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. $6\sqrt{3}\pi$　　C. $12\sqrt{3}\pi$　　D. $18\sqrt{3}\pi$

12. 设 $a=1.1e^{0.9}$，$b=0.99e$，$c=0.9e^{1.1}$，则

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知等边三角形 ABC 的边长为 1，$\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$________

14. 若从 2，3，4，5，6 这 5 个数字中任取 3 个，则所取 3 个数之和为偶数的概率为________

15. 已知点 P 为曲线 $y=\ln x$ 上的动点，则 P 到直线 $y=x+4$ 的最小距离为________

16. 已知双曲线 C 的焦点关于其一条渐近线的对称点恰好在 C 上，则该双曲线的离心率为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$a_1=2$，且 a_3 为 a_1 与 a_{11} 的等比中项.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=2^n a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）

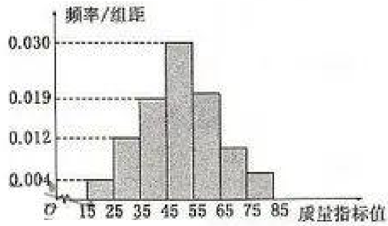
记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$2b=3c,B=2C$.

（1）求$\cos C$；

（2）若$a=5$，求c.

19.（12 分）

为了监控某一条生产线的生产过程，从其产品中随机抽取 100 件，测量这些产品的质量指标值，由测量结果得到如图所示的频率分布直方图，其中质量指标值落在区间[55,65)，[65,75)，[75,85]内的频率是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.



（1）求这些产品质量指标值落在区间[75,85]内的频率；

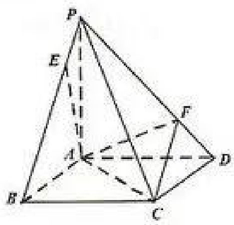
（2）若将频率视为概率，从该条生产线的这种产品中随机抽取 3 件，记这 3 件产品中质量指标位于区间[45,75)内的产品件数为X，求X的分布列与数学期望.

20.（12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB$，$PD=3FD$，$BE=3EP$.

（1）求证：$AE\perp FC$；

（2）求AE与平面ACF所成角的余弦值.



3
官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

21.（12 分）

已知线段 MN 的长度为 3，其端点 M,N 分别在 x 轴与 y 轴上滑动，动点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{PM}$.

（1）求动点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）当点 M 坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，且点 P 在第一象限时，设动直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，且两直线 PA、PB 的斜率互为相反数，求直线 l 的斜率.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：$f(x)\geqslant\frac{\sqrt{x+1}}{2}$.

参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	C	B	A	B	A	C	D	A	C	D

13. $\frac{3}{2}$　　14. $\frac{2}{5}$　　15. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　16. $\sqrt{5}$

17.【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_3=2+2d, a_{11}=2+10d$,

由已知得 $(2+2d)^2=2(2+10d)$，因为 $d\neq 0$，所以 $d=3$

故 $a_n=3n-1$.

(2) 由 (1) 知 $b_n=2^n a_n=(3n-1)2^n$.

所以 $S_n=2\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(3n-1)\cdot 2^n$ ①

$2S_n=2\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(3n-1)\cdot 2^{n+1}$ ②

由①-②得：$-S_n=4+3\cdot(2^2+\cdots+2^n)-(3n-1)\cdot 2^{n+1}$

$S_n=(3n-4)\cdot 2^{n+1}+8$

18.【解析】(1) 因为 $2b=3c$，由正弦定理得 $2\sin B=3\sin C$

又 $B=2C$，所以 $\sin B=2\sin C\cos C$, $\sin C\neq 0$.

故 $\cos C=\frac{3}{4}$.

(2) 由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos c$

将 $a=5, b=\frac{3c}{2}$ 代入解得 $c=4$ 或 $c=5$

当 $c=4$ 时，$b=6, \cos B=\frac{1}{8}, \cos 2C=2\cos^2 C-1=\frac{1}{8}$，满足 $B=2C$

当 $c=5$ 时，$b=7.5, \cos B=-\frac{1}{8}$ 不满足 $B=2C$，故舍去.

综上：$c=4$.

注：用正弦定理求出 ，给出相应的分数.

19.【解析】

(1) 设这些产品质量指标落在区间 $[55,65]$ 内的概率为 x，则落在区间 $[75,85]$，$[65,75]$ 内的概率分别为 $\frac{1}{2}x$ 和 $\frac{1}{4}x$

依题意得 $(0.004+0.012+0.019+0.03)\times10+x+\frac{1}{2}+5x=1$，

解得 $x=0.2$

所以这些产品质量指标值落在区间 $[75,85]$ 内的频率为 0.05.

(2) 由(1)得，这此产品质量指标值落在区间 $[45,75]$ 内的频率为 0.3+0.2+0.1=0.6，

将频率视为概率得 $p=0.6$．

从该企业生产的该种产品中随机抽取 3 件，相当于进行了 3 次独立重复试验，

所以 $X\sim B(n,p)$ 其中 $n=3$．

因为 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3，且

$P(X=0)=C_3^0\times0.6^0\times0.4^3=0.064$

$P(X=1)=C_3^1\times0.6^1\times0.4^2=0.288$

$P(X=2)=C_3^2\times0.6^2\times0.4^1=0.432$，$P(X=3)=C_3^3\times0.6^3\times0.4^0=0.216$．

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

X 的数学期望为 $E(X)=3\times0.6=1.8$，

20.【解析】(1) 由已知可得 AB,AD,AP 两两垂直.

以 AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

设 $AB=1$，

则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),P(0,0,1)$，

因为 $PD=3FD,BE=3EP$，所以 $E\left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right),F\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

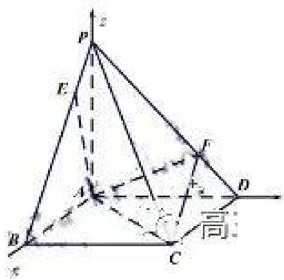
所以 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right),\overrightarrow{FC}=\left(1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FC}=\left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=0$，

所以 $AE\perp FC$．

(2) 由(1)可知: $\overrightarrow{AF}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

设平面 ACF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，



则$\begin{cases}2y+z=0\\x+y=0\end{cases}$取$x=1,y=-1,z=2$

则$\vec{n}=(1,-1,2)$.

又$\overline{AE}=\left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right)$，所以 $\cos\langle\overline{AE},\vec{n}\rangle=\frac{7\sqrt{15}}{30}$.

AE 与平面 ACF 所成角的余弦值$\frac{\sqrt{165}}{30}$.

21.【解析】（1）设$M(m,0),N(0,n),P(x,y)$，则$m^2+n^2=9$

由已知得 $(x,y-n)=2(m-x,-y)$，故$m=\frac{3}{2}x,n=3y$

代入上式整理得：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

所以动点 P 的轨迹 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）因为$M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，故点$P$的横坐标为$\sqrt{2}$，又点 P 在第一象限，故$P\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

设 的方程为$y=kx+t$，与$\frac{x^2}{4}+y^2=1$联立整理得 $(4k^2+1)x^2+8ktx+4t^2-4=0$

由已知$\Delta>0$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{-8kt}{4k^2+1},x_1x_2=\frac{4t^2-4}{4k^2+1}$ ①

由已知直线PA,PB 的斜率互为相反数，则$\frac{y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1-\sqrt{2}}+\frac{y_2-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2-\sqrt{2}}=0$

将 $y_1=kx_1+t,y_2=kx_2+t$ 代入上式整理得

$2kx_1x_2+\left(t-\sqrt{2}k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ ②

将①代入②化简 $(2k-1)(2k+\sqrt{2}t-1)=0$,

由已知 不经过点P，故$2k+\sqrt{2}t-1\neq0$，所以 $k=\frac{1}{2}$.

故直线 的斜率为$\frac{1}{2}$.

22.【解析】(1) 定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$.

当 $x<-2$ 或 $-2<x<-1$ 时, $f'(x)<0$;当 $x>-1$ 时, $f'(x)>0$.

$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$ 上单调递减, 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增

(2) 令 $g(x)=\dfrac{e^x}{(x+2)^2}(x\geq -1)$, $g'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+2)^3}$.

当 $-1\leq x<0$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x>0$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(x)_{\min}=g(0)=\dfrac{1}{4}$

故当 $x\geq -1$ 时, $\dfrac{e^x}{(x+2)^2}\geq\dfrac{1}{4}$, 即 $f(x)\geq\dfrac{1}{4}(x+2)$.

由均值不等式得: $\dfrac{1}{4}(x+2)=\dfrac{1}{4}[(x+1)+1]\geq\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号.

故 $f(x)\geq\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}$.

$\dfrac{e^x}{x+2}\geq\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}\Leftrightarrow e^x=e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}\geq\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2\geq\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\sqrt{x+1}$, 显然 $e^{\frac{x}{2}}\geq\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$ 成立,

只需证: $\dfrac{x}{2}+1=\dfrac{(x+1)+1}{2}\geq\sqrt{x+1}$, 由基本不等式显然成立, 所以原不等式成立

自主选拔在线 微信号: zizzsw

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。