2023-2024 学年（上）高三 10 月份质量监测

数学

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=(-1,2)$，$B=(a-2,a)$，若 $A\cap B=(-1,0)$，则 $a=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】B

【解析】$A\cap B=(-1,0)$，$\therefore a=0$，选 B.

2．已知复数 $z=\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{2023}$，则 $|z|=$

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】$z=\left(\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2}\right)^{2023}=(-\mathrm{i})^{2023}=\mathrm{i}$，$|z|=1$，选 C.

3．在△ABC 中，“$A=B$”是“$\sin A=\sin B$”的

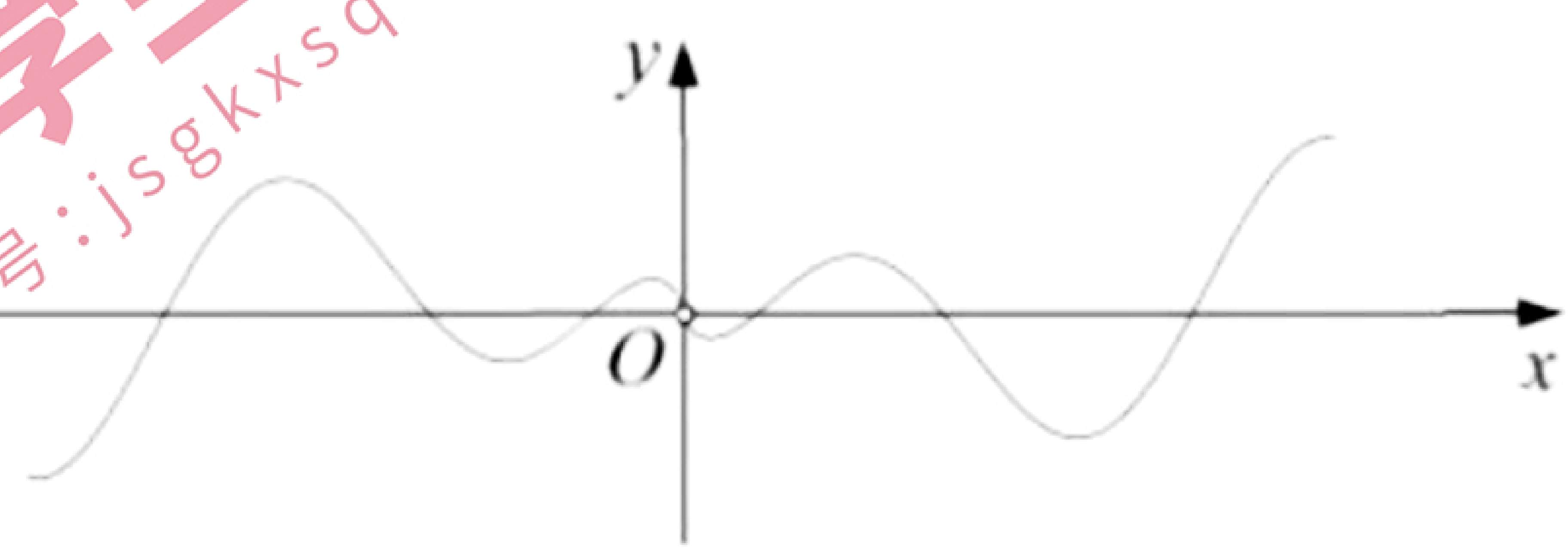
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】C

【解析】△ABC 中“$A=B$”是“$\sin A=\sin B$”的充要条件，选 C.

4．已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为



A．$f(x)=\dfrac{\ln|x|}{2+\cos x}$　　B．$f(x)=\dfrac{\ln|x|}{2+\sin x}$

C．$f(x)=\cos x\cdot\ln|x|$　　D．$f(x)=\sin x\cdot\ln|x|$

【答案】D

【解析】$f(x)$为奇函数，排除A，C；$f(x)$在正半轴至少有3个零点，排除B，选D.

5．记地球与太阳的平均距离为R，地球公转周期为T，万有引力常量为G，则太阳的质量$M=\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}$（单位：kg）.由$\lg\dfrac{R^3}{GT^2}\approx 28.7$，$\lg 2\approx 0.3$，$\lg\pi\approx 0.5$得太阳的质量约为

A．2×10^{29} kg　　B．2×10^{30} kg　　C．3×10^{29} kg　　D．3×10^{30} kg

【答案】B

【解析】$\lg M=\lg\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\lg 4+\lg\pi^2+\lg\dfrac{R^3}{GT^2}=0.6+1+28.7=30.3=30+0.3$

$M=10^{30+0.3}=10^{30}\cdot 10^{\lg 2}=2\times 10^{30}$，选B.

6．已知$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$

A．$-\dfrac{7}{25}$　　B．$\dfrac{7}{25}$　　C．$-\dfrac{24}{25}$　　D．$\dfrac{24}{25}$

【答案】B

【解析】$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha$

$=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，$\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=1-2\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$，选B.

7．已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，$g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(x)$，$g(x)$在$(-\infty,0]$单调递减，则

A．$f(f(x))$在$[0,+\infty)$单调递减　　B．$f(g(x))$在$[0,+\infty)$单调递减
C．$g(g(x))$在$[0,+\infty)$单调递减　　D．$g(f(x))$在$[0,+\infty)$单调递减

【答案】D

【解析】不妨设$f(x)=x^2$，$g(x)=-x$，$f(f(x))=x^4$在$[0,+\infty)\nearrow$，A错.

$f(g(x))=f(-x)=x^2$在$[0,+\infty)\nearrow$，B错.

$g(g(x))=g(-x)=-(-x)=x$在$[0,+\infty)\nearrow$，C错，选D.

8．已知曲线$y=-x^3-3x^2+9x+9$与曲线$y=\dfrac{1-2x}{x+1}$交于点$A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，…，$A_n(x_n,y_n)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=$

A．-16　　B．-12　　C．-9　　D．-6

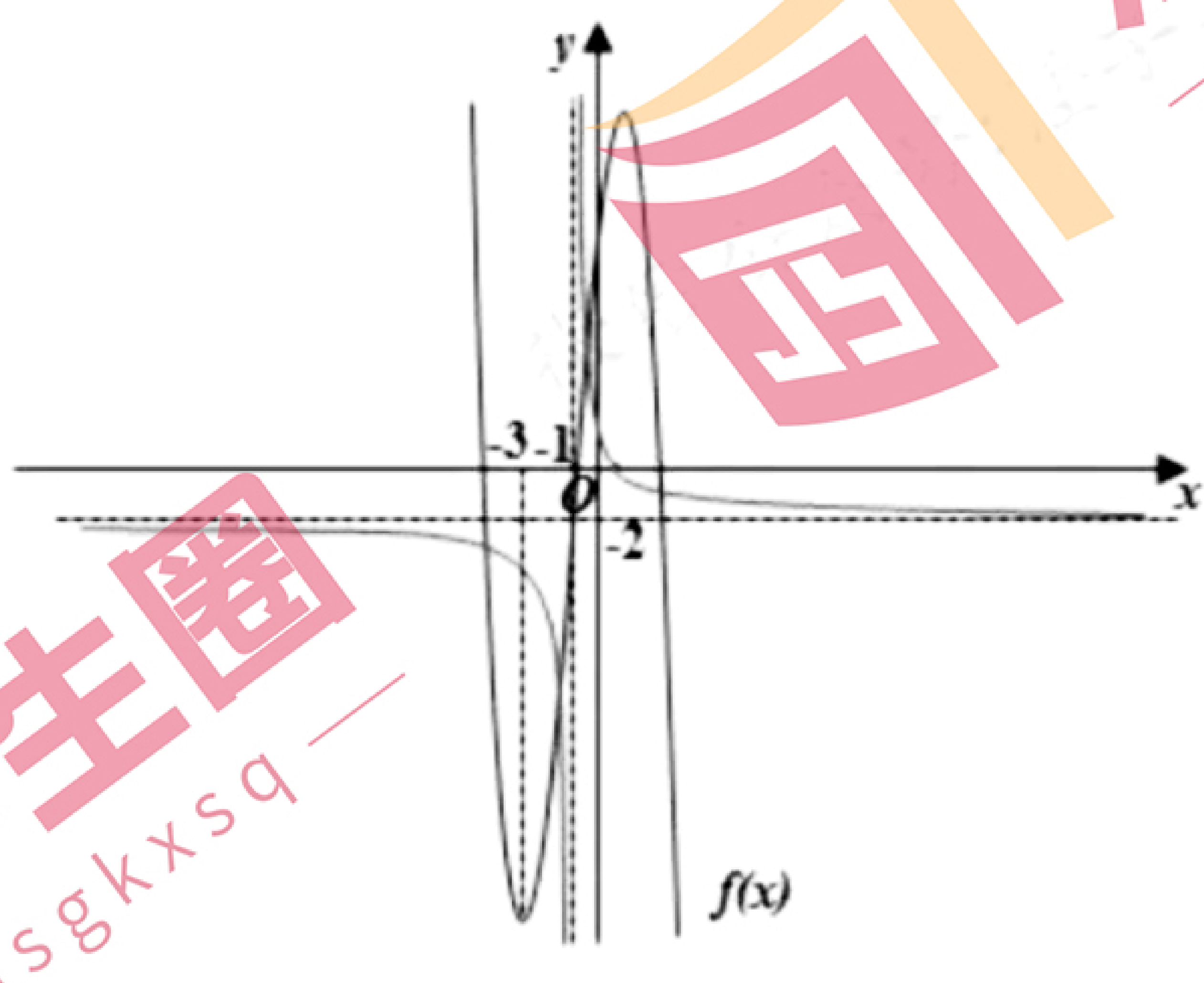
【答案】B

【解析】方法一：

$f(x)=-x^3-3x^2+9x+9$，$f'(x)=-3x^2-6x+9$，$f''(x)=-6x-6=0\Rightarrow x=-1$

$f(x)$关于$(-1,-2)$中心对称，而$g(x)=\dfrac{1-2x}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+3}{x+1}=-2+\dfrac{3}{x+1}$也关于$(-1,-2)$中心对称，$f'(x)=-3(x+3)(x-1)$，$f(x)$在$(-\infty,-3)$上↙；$(-3,1)$上↗；$(1,+\infty)$上↙

作出$f(x)$大致图象如下：



$f(-3)=-18$，$f(1)=14$ 结合图象知$y=f(x)$与$y=g(x)$共四个交点，且两两关于$(-1,-2)$中心对称，$\therefore\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=-2\times2+(-4\times2)=-12$，选：B.

方法二：$y'=-3x^2-6x+9$，$y''=-6x-6=0$，$x=-1$，$y=-2$，y的对称中心$(-1,-2)$

$y=\dfrac{-2x+1}{x+1}=\dfrac{-2x-2+3}{x+1}=-2+\dfrac{3}{x+1}$对称中心$(-1,-2)$，

$A_1(x_1,y_1)$，$A_n(x_n,y_n)$关于$(-1,-2)$对称，$x_1+x_n=-2$，$y_1+y_n=-4$，

$(x_1+y_1)+(x_n+y_n)=-6$，$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\dfrac{n}{2}\times(-6)=-3n$.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．已知平面向量$\vec{a}=(1,3)$，$\vec{b}=(-2,1)$，则

A．$|\vec{a}|=\sqrt{10}$　　B．$(2\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$

C．$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角　　D．$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\dfrac{1}{5}\vec{b}$

【答案】ACD

【解析】$|\vec{a}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，A对.

$(2\vec{a}-\vec{b})\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=2(-2+3)-5=-3\neq0$，则$2\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$不垂直，B错.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1>0$，$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为锐角，C对.

$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{5}\vec{b}$，D对，选ACD.

10．已知实数a，b，c满足$a>b>c$，且$a+b+c=0$，则

A．$ab+bc<0$

B．$\ln(a-c)>\ln(b-c)$

C．$2b<a-c$

D．$a^2>c^2$

【答案】BC

【解析】$\begin{cases}a>b>c\\a+b+c=0\end{cases}$，则$a>0$，$c<0$，

$ab+bc=(a+c)b=-(a+c)(a+c)=-(a+c)^2\le 0$，A错.

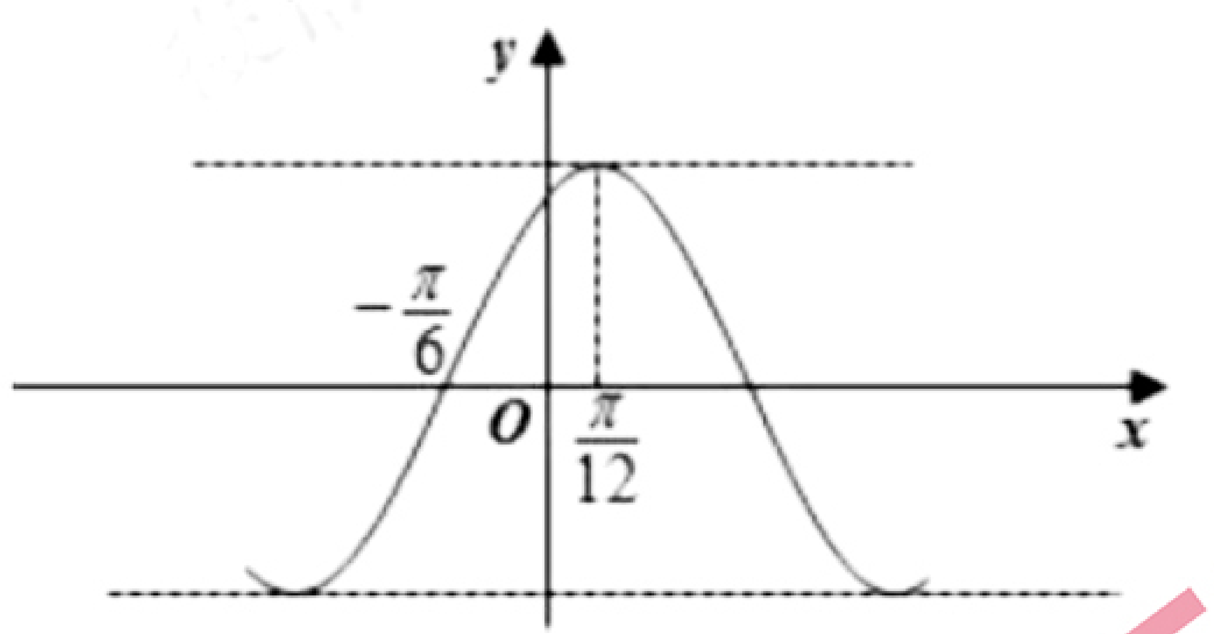
$a-c>b-c>0$，$\therefore\ln(a-c)>\ln(b-c)$，B对.

$a-c-2b=a-c-2(-a-c)=a-c+2a+2c=3a+c$，

又$\because a>b$，则$a>-a-c$，$\therefore 2a+c>0$，$\therefore a-c-2b=2a+c+a>0$，C对.

$b=0$时$a+c=0$，$a^2=c^2$，D错，选BC.

11．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则



A．$f(x)$的图象可由曲线$\sin 2x$向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度得到

B．$f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C．$\left(-\dfrac{2\pi}{3},0\right)$是$f(x)$图象的一个对称中心

D．$f(x)$在区间$\left[\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{5\pi}{4}\right]$上单调递增

【答案】BC

【解析】$\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore T=\pi=\dfrac{2\pi}{\omega}$，$\omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$y=\sin 2x$ 向左移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位变为 $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\neq f(x)$，A 错.

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，B 对.

$-\frac{\pi}{6}-\frac{T}{2}=-\frac{2}{3}\pi$，$\therefore\left(-\frac{2}{3}\pi,0\right)$ 是 $f(x)$ 的对称中心，C 对.

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$-\frac{5}{12}\pi+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{12}+k\pi$，

$f(x)$ 在 $\left[\frac{7\pi}{12},\frac{13}{12}\pi\right]\nearrow$，$\left[\frac{13}{12}\pi,\frac{19}{12}\pi\right]\swarrow$，$\therefore f(x)$ 在 $\left[\frac{14}{12}\pi,\frac{15}{12}\pi\right]\swarrow$，D 错，选 BC.

12．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)+f(x+1)=0$，$f(2-x)=f(x+4)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

则

A．$f(2)=0$　　　　B．$f(x)+f(-x)=0$

C．$\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{k}{2}\right)=1$　　　　D．$\sum_{k=1}^{100}kf\left(k-\frac{1}{2}\right)=-100$

【答案】AB

【解析】方法一：$\because f(x+3)+f(x+1)=0$，$\therefore f(x+2)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 一个周期为 4，

$\therefore f(2-x)=f(x)\Rightarrow f(-x)=f(x+2)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，B 正确.

$\therefore f(0)=0\Rightarrow f(2)=0$，A 正确.

$f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的一个周期为 8，$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)=0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=0$，$f(1)+f(3)=0$，

$f(2)+f(4)=0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$100\div 8=12\cdots 4$，

$\therefore\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{k}{2}\right)=12\times 0+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)=f(1)+1$，但 $f(1)$ 未知，故 C 错.

对于 D，$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=1$，$f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)=-1$，$k=4m-3$ 时，$m\in\mathbf{N}^*$，

$kf\left(k-\frac{1}{2}\right)+(k+1)f\left(k+\frac{1}{2}\right)+(k+2)f\left(k+\frac{3}{2}\right)+(k+3)f\left(k+\frac{5}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(4m-3)+\frac{1}{2}(4m-2)-\frac{1}{2}(4m-1)-\frac{1}{2}\cdot 4m=-2$，

$\therefore\sum_{k=1}^{100}kf\left(k-\frac{1}{2}\right)=-2\times 25=-50$，D 错，选：AB.

或令 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$ 知 A，B 正确，C，D 错.（秒杀）.

方法二： $f(x+3)+f(x+1)=0$，则 $f(x+2)+f(x)=0$，$\therefore f(x)$周期为 4，

$f(2-x)=f(x+4)$，则 $f(x)$关于 $x=3$ 对称，$f(x)=A\sin\frac{\pi}{2}x$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A=\frac{1}{2}$，$\therefore A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$，$f(2)=0$，A 对.

$f(x)+f(-x)=0$，B 对.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{4}{2}\right)=0$，$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{6}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$f\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{8}{2}\right)=0$，$\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{k}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{4}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，C 错.

$1\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$2f\left(\frac{3}{2}\right)=1$，$3f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{2}$，$4f\left(\frac{7}{2}\right)=-2$，$\sum_{i=1}^{4}kf\left(k-\frac{1}{2}\right)=-2$

$\sum_{k=1}^{100}kf\left(k-\frac{1}{2}\right)=25\times(-2)=-50$，D 错，选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13 .已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 与偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=2^x$，则 $f(1)=$________.

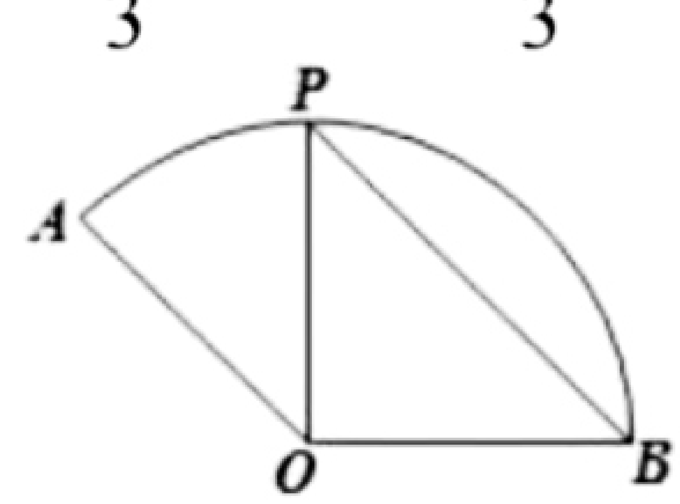
【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】 $f(-x)+g(-x)=2^{-x}$，$\therefore -f(x)+g(x)=2^{-x}$，$\therefore f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$，$f(1)=\frac{3}{4}$.

14 .已知扇形 AOB 的半径为 1 ，面积为 $\frac{\pi}{3}$ ，P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的动点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为________.

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】 设 $\angle AOB=\alpha$，则 $\frac{1}{2}\alpha\cdot 1^2=\frac{\pi}{3}$，$\therefore \alpha=\frac{2\pi}{3}$，



设 $\angle BOP=\theta$，则 $0\le\theta\le\frac{2}{3}\pi$，$\angle OPB=\frac{\pi-\theta}{2}$，$\frac{PB}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$，$\therefore PB=2\sin\frac{\theta}{2}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PB}=-1\times2\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=-2\sin^2\frac{\theta}{2}\geq-2\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$.

15．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是________.

【答案】 $\left[\frac{11}{4},\frac{15}{4}\right)$

【解析】 $0\leq x\leq\pi$，$\frac{\pi}{4}\leq\omega x+\frac{\pi}{4}\leq\omega\pi+\frac{\pi}{4}$，$f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 有且仅有 3 个零点，

则 $3\pi\leq\omega\pi+\frac{\pi}{4}<4\pi$，$\therefore\frac{11}{4}\leq\omega<\frac{15}{4}$.

16．若存在 $x\in(0,+\infty)$，使得 $\ln x-xe^x+1\geq2ax$，则 a 的取值范围是________.

【答案】 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

【解析】 $a\leq\left(\frac{\ln x-xe^x+1}{2x}\right)_{\max}$，

$$\frac{\ln x-xe^x+1}{2x}=\frac{\ln x+1-e^{x+\ln x}}{2x}\leq\frac{\ln x+1-(x+\ln x+1)}{2x}=-\frac{1}{2},$$

当且仅当 $x+\ln x=0$ 时取“=”可取“=”，$\therefore a\leq-\frac{1}{2}$，应填：$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$2a=2c\cos B+b$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $AB=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【解析】

（1）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $2a=2c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b$，

整理得 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

（2）由余弦定理，得$a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}=(\sqrt{7})^2$，$(a+b)^2-3ab=7$.

由$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，得$ab=6$，

所以$(a+b)^2-18=7$，解得$a+b=5$，所以$a+b+c=5+\sqrt{7}$，

即$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=5+\sqrt{7}$.

18.（12分）设向量$\vec{a}=(2\cos x,2\sin x)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}\cos x,\cos x)$，函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\sqrt{3}$.

（1）求$f(x)$图象的对称轴方程；

（2）若$f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=-\dfrac{6}{5}$，且$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求$\cos\alpha$的值.

【解析】

（1）因为$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\sqrt{3}=(2\cos x,2\sin x)\cdot(\sqrt{3}\cos x,\cos x)-\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

令$2x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，得$x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

所以$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

（2）因为$f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=-\dfrac{6}{5}$，所以$2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{6}{5}$，即$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{5}$

又因为$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{4\pi}{3}\right)$，

故$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$，

所以$\cos\alpha=\cos\left(\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

19.（12分）已知函数$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-3x^2-9x$.

（1）当$a=3$时，求$f(x)$在区间$[0,4]$上的最值；

（2）若直线$l:12x+y-1=0$是曲线$y=f(x)$的一条切线，求a的值.

【解析】

（1）当$x=3$时，$f(x)=x^3-3x^2-9x$，

导函数$f'(x)=3x^2-6x-9$，即$f'(x)=3(x-3)(x+1)$.

令$f'(x)<0$，解得$-1<x<3$；$f'(x)>0$，解得$x<-1$或$x>3$.

所以当$x\in[0,3]$时，$f(x)$单调递减；当$x\in[3,4]$时，$f(x)$单调递增.

所以当$x=3$时，$f(x)_{\min}=f(3)=-27$.

又因为$f(0)=0$，$f(4)=-20$，所以$f(x)_{\max}=f(0)=0$.

（2）导函数$f'(x)=ax^2-6x-9$，

设直线l与曲线$y=f(x)$相切于点$P(x_0,y_0)$，

则$\begin{cases} ax_0^2-6x_0-9=-12, \\ \dfrac{a}{3}x_0^3-3x_0^2-9x_0=-12x_0+1, \end{cases}$消去$a$，得$x_0^2-2x_0+1=0$，

解得$x_0=1$.代入$ax_0^2-6x_0-9=-12$，解得$a=3$.

20.（12分）在平面四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，$BC=2$

（1）若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=3$，求$AC$；

（2）若$AD=2\sqrt{3}$，$\angle ACB=\angle ACD+\dfrac{\pi}{3}$，求$\tan\angle ACD$.

【解析】

（1）在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=2$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos\angle ABC=|\overrightarrow{AB}|=3$，所以$AB=3$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=7$.

因为$AC>0$，解得$AC=\sqrt{7}$.

（2）设$\angle ACD=\alpha$，则$\angle ACB=\angle ACD+\dfrac{\pi}{3}=\alpha+\dfrac{\pi}{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，因为$AD=2\sqrt{3}$，所以$AC=\dfrac{AD}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha}$，

在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\pi-\angle ACB-\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

由正弦定理，得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，即$\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$，

所以$2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\alpha$，即$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\sin\alpha$

整理，得$\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\alpha$，所以$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\tan\angle ACD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21．(12分)设函数$f(x)=e^x-e^{-x}-ax$.

(1)证明：当$a=2$时，$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数；

(2)当$x>0$时，$f(x)>0$，求a的取值范围.

【解析】

(1)当$a=2$时，$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，导函数$f'(x)=e^x+e^{-x}-2$.

因为$e^x>0$，所以$e^x+e^{-x}\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，
当且仅当$e^x=e^{-x}$，即$x=0$时，等号成立.所以$f'(x)\geq 0$，

所以$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数.

(2)当$a=2$时，由(1)可知，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为$f(0)=0$，所以当$x>0$时，$f(x)>0$.

当$a<2$时，因为$x>0$，所以$f(x)=e^x-e^{-x}-ax>e^x-e^{-x}-2x>0$.

当$a>2$时，$f'(x)=e^x+e^{-x}-a$，

令$f'(x)=0$，$e^x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$，解得$x=\ln\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$或$\ln\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，

因为$a>2$，所以$\ln\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}>\ln 1=0$，

$\ln\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}=\ln\frac{2}{a+\sqrt{a^2-4}}=-\ln\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}<0$，舍去.

记$\ln\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}=x_0$，当$x\in(0,x_0)$时，$e^x\in(1,e^{x_0})$，

所以 $f'(x)<0$ ，$f(x)$ 单调递减，又因为 $f(0)=0$ ，

所以 $f(x_0)<0$ ，与 $f(x)>0$ 矛盾，不符合题意.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=x^2-x-a\ln x$ 存在两个极值点 x_1,x_2 ，且 $x_1<x_2$.

（1）求 a 的取值范围；

（2）若 $f(x_2)-f(x_1)<mx_1x_2$ ，求 m 的最小值.

【解析】

（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ，且 $f'(x)=\dfrac{2x^2-x-a}{x}$.

因为函数 $f(x)$ 存在两个极值点，

所以方程 $2x^2-x-a=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个不等根.

由 $\begin{cases}\Delta=1+8a>0\\ x_1+x_2=\dfrac{1}{2}>0\\ x_1x_2=-\dfrac{a}{2}>0\end{cases}$ ，得 $-\dfrac{1}{8}<a<0$.

所以 a 的取值范围为 $\left(-\dfrac{1}{8},0\right)$.

（2）由（1）知 $x_1x_2=-\dfrac{a}{2}>0$ ，

所以 $f(x_2)-f(x_1)<mx_1x_2$ 可化为 $m>\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1x_2}$.

因为 $x_1+x_2=\dfrac{1}{2}$ ，$0<x_1<x_2$ ，所以 $0<x_1<\dfrac{1}{4}$ ，$\dfrac{1}{4}<x_2<\dfrac{1}{2}$ ，

所以 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1x_2}=\dfrac{x_2^2-x_2-a\ln x_2-x_1^2+x_1+a\ln x_1}{x_1x_2}$

$=\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1-1)-2x_1x_2\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1x_2}-2\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}-2\ln\dfrac{x_1}{x_2}$.

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$ ，$t=\dfrac{\frac{1}{2}-x_2}{x_2}=\dfrac{1}{2x_2}-1\in(0,1)$ ，

设 $g(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t(0<t<1)$ ，则 $g'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$ ，

所以函数 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

因为 $g(1)=0$ ，所以 $g(t)<0$ ，

所以 $m\geq 0$ ，即实数 m 的最小值为 0.