

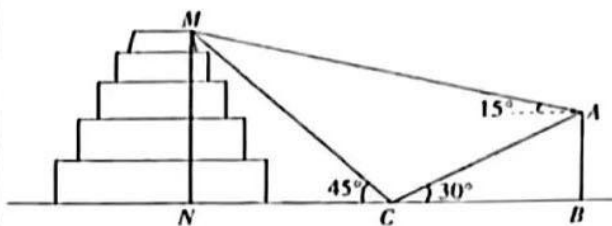
数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在试卷和答题卡指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x \leq 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{5 - 0.2^x}\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[-1, 0]$ B. $(-1, 0]$ C. $(-2, -1)$ D. $(-2, -1]$
2. 已知复数 $z = 1 + \sqrt{3}i$ (其中 i 是虚数单位), 则 $z^2 + \bar{z} =$
A. $1 + \sqrt{3}i$ B. $3 + \sqrt{3}i$ C. $5 + \sqrt{3}i$ D. $-1 + \sqrt{3}i$
3. 有一个正四棱台的油槽, 可以装油152升. 若油槽的上下底面边长分别为60 cm和40 cm, 则它的深度是
A. 180 cm B. 80 cm C. 60 cm D. 30 cm
4. 现有6个大小相同、质地均匀的小球, 球上标有数字1, 3, 3, 4, 5, 6. 从这6个小球中随机取出两个球, 如果已经知道取出的球中有数字3, 则所取出的两个小球上数字都是3的概率为
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{15}$
5. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(x+1)$, 且 $y = f(2x+2)$ 为奇函数, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, 则 $f(2023) =$
A. 1 B. -1 C. 0 D. 2
6. 中国古代四大名楼鹤雀楼, 位于山西省运城市永济市蒲州镇, 因唐代诗人王之涣的诗作《登鹤雀楼》而流芳后世. 如图, 某同学为测量鹤雀楼的高度 MN , 在鹤雀楼的正东方向找到一座建筑物 AB , 高约为37 m, 在地面上点 C 处 (B, C, N 三点共线) 测得建筑物顶部 A , 鹤雀楼顶部 M 的仰角分别为 30° 和 45° , 在 A 处测得楼顶部 M 的仰角为 15° , 则鹤雀楼的高度约为



(第6题图)

A. 64 m

B. 74 m

C. 52 m

D. 91 m

7. 已知曲线 $C_1: y = \sin \frac{\pi}{2}x + ax^2$ 上一点 $(1, 2)$ 处的切线为 l , 曲线 $C_2: y = x^3 - bx^2 + 1$ 上至多存在一条与 l 垂直的切线, 则实数 b 的取值范围是

A. $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

B. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

C. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8. 圆锥曲线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形叫做阿基米德三角形. 过抛物线焦点 F 作抛物线的弦, 与抛物线交于 A, B 两点, 分别过 A, B 两点作抛物线的切线 l_1, l_2 相交于点 P , 那么阿基米德三角形 PAB 满足以下特性: ①点 P 必在抛物线的准线上; ② $\triangle PAB$ 为直角三角形, 且 $\angle APB$ 为直角; ③ $PF \perp AB$. 已知 P 为抛物线 $y^2 = x$ 的准线上一点, 则阿基米德三角形 PAB 面积的最小值为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. 2

D. 1

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设向量 $a = (\sqrt{3}, -1), b = (0, 2)$, 则

A. $|a| = |b|$

B. a 与 b 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$

C. $(2a+b) \parallel b$

D. $(2a+b) \perp b$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln(x-1)|, & x > 1. \\ x^2 - 4|x| + 3, & x \leq 1. \end{cases}$ 则下列结论正确的是

A. 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减

B. 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-1, +\infty)$

C. 若方程 $f(x) = a$ 有 5 个解, 则 a 的取值范围为 $(0, 3)$

D. 若函数 $f(x)$ 有 3 个不同的零点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 则 $x_1 + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ 的取值范围为 $(-\infty, -3)$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 其外接球的球心为 O , 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} (0 < \lambda < 1)$, 过点 P 的平面 α 平行于 AD 和 A_1B , 则

A. 平面 $\alpha \parallel$ 平面 A_1BCD_1

B. 平面 $\alpha \perp$ 平面 ABB_1A_1

C. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 平面 α 截球 O 所得截面的周长为 $\sqrt{10}\pi$

D. 平面 α 截正方体所得截面的面积为定值

数学试题 B 第 2 页 (共 4 页)



12. 已知圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$, 点 Q 为直线 $l: kx + y - 2k - 3 = 0$ 上的动点, 则下列说法正确的是

A. 圆心 C 到直线 l 的最大距离为 8

B. 若直线 l 平分圆 C 的周长, 则 $k = -1$

C. 若圆 C 上至少有三个点到直线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{-16 - \sqrt{31}}{15} < k < \frac{-16 + \sqrt{31}}{15}$

D. 若 $k=1$, 过点 Q 作圆 C 的两条切线, 切点为 A, B , 当点 Q 坐标为 $(2, 3)$ 时, $\angle AQB$ 有最大值

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(x^2 - 2)\left(\frac{1}{x} - 1\right)^5$ 的展开式中常数项为 (用数字作答).

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \cdots + (2n-1)a_n = (n+1)^2, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n =$.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 为双曲线 C 的右支上一点, 点 A 关于原点 O 的对称点为 B , 满足 $\angle F_1 A F_2 = 60^\circ$, 且 $|BF_2| = 2|AF_2|$, 则双曲线 C 的离心率为 .

16. 已知实数 a, b 满足 $b(e^a - 1) + a = e^b - \ln b$, 则 $b^2 e^a - 2e^b$ 的取值范围是 .

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} + 2a_n^2$, 且 $3a_1, a_2 + 3, a_3$ 成等差数列.

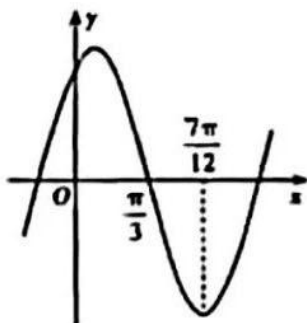
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ \log_{\frac{1}{2}} a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

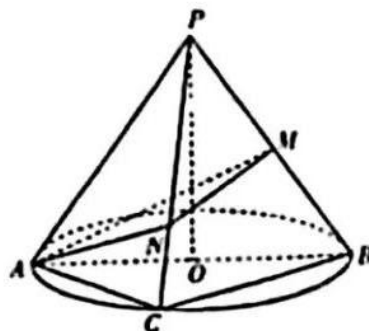
18. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式, 并求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若对任意 $x \in [t, \frac{\pi}{3}]$, 都有 $|f(x)f(x - \frac{\pi}{6}) - 1| \leq 1$, 求实数 t 的取值范围.



(第 18 题图)



(第 19 题图)

19. (12分) 如图, 在圆锥 PO 中, AB 是底面圆的直径, $PA=AB=2$, C 是底面圆周上一点, PC 与平面 PAB 所成的角为 30° , 点 M, N 分别在 PB, PC 上, 且 $PB \perp$ 平面 AMN .

(1) 求 $\frac{PN}{NC}$ 的值;

(2) 求平面 AMN 与平面 PAC 夹角的余弦值.

20. (12分) 2022 年河南、陕西、山西、四川、云南、宁夏、青海、内蒙古 8 省区公布新高考改革方案, 这 8 省区的新高中生不再实行文理分科, 今后将采用“3+1+2”高考模式. “3+1+2”高考模式是指考生总成绩由全国统一高考的语文、数学、外语 3 个科目成绩和考生选择的 3 科普通高中学业水平选择性考试科目成绩组成, 满分为 750 分. “3”是三门主科, 分别是语文、数学、外语, 这三门科目是必选的; “1”指的是要在物理、历史里选一门, 按原始分计入成绩; “2”指考生要在生物学、化学、思想政治、地理 4 门中选择 2 门, 但是这几门科目不以原始分计入成绩, 而是等级赋分.

(1) 若按照“3+1+2”模式选科, 求选出的六科中含有“语文, 数学, 外语, 历史, 地理”的概率;

(2) 某教育部门为了调查学生语数外三科成绩与选科之间的关系, 现从当地不同层次的学校中抽取高一学生 4000 名参加语数外的网络测试, 满分 450 分, 并给前 640 名颁发荣誉证书, 假设该次网络测试成绩服从正态分布.

① 考生甲得知他的成绩为 260 分, 考试后不久了解到如下情况: “此次测试平均成绩为 210 分, 290 分以上共有 91 人”, 问甲能否获得荣誉证书, 请说明理由;

② 考生丙得知他的实际成绩为 425 分, 而考生乙告诉考生丙: “这次测试平均成绩为 240 分, 360 分以上共有 91 人”, 请结合统计学知识帮助丙同学辨别乙同学信息的真伪.

附: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

21. (12分) 已知点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 4} = 1 (a > 2)$ 上, 直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两

点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求直线 l 的斜率;

(2) 求 $\triangle APQ$ 面积的最大值.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - ax$.

(1) 若 $f(x) \leq -1$, 求实数 a 的取值范围;

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线