郑州市 2023 年高中毕业年级第三次质量预测

理科数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题，共 60 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid y=\lg(4-x)\}$ 子集的个数为

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 8 个　　D. 16 个

2. 复平面内，复数 $\dfrac{3-i}{1+i^{2023}}$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

4. 欧拉长方体，又称整数长方体或欧拉砖，指棱长和面对角线长都是整数的长方体. 记 $E(a,b,c;d,e,f)$ 为欧拉长方体，其中 a,b,c 为长方体的棱长，d,e,f 为面对角线长. 最小的欧拉长方体是 $E(44,117,240;267,244,125)$. 从 $E(44,117,240;267,244,125)$，$E(85,132,720;157,725,732)$，$E(140,480,693;500,707,843)$，$E(160,231,792;281,808,825)$，$E(187,1020,1584;1037,1595,1884)$，$E(195,748,6336;773,6339,6380)$ 中任取两个欧拉砖，则恰有一个最短棱长小于 100 的欧拉砖的概率为

A. $\dfrac{2}{15}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{8}{15}$

5. 抛物线有一条重要性质：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的对称轴，反之，平行于抛物线对称轴的光线，经过抛物线

上的一点反射后，反射光线经过该抛物线的焦点. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，一条平行于 y 轴的光线，经过点 $A(1,4)$，射向抛物线 C 的 B 处，经过抛物线 C 的反射，经过抛物线 C 的焦点 F，若 $|AB|+|BF|=5$，则抛物线 C 的准线方程是

A. $y=-\frac{1}{2}$　　B. $y=-1$　　C. $y=-2$　　D. $y=-4$

6. 设函数 $g(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在区间 $(0,\pi)$ 内恰有三个极值点、两个零点，则 ω 的取值范围是

A. $(\frac{7}{3},\frac{17}{6}]$　　B. $[\frac{5}{3},\frac{19}{6})$　　C. $[\frac{5}{3},\frac{13}{6})$　　D. $(\frac{7}{3},\frac{10}{3}]$

7. 2023 年 1 月底，人工智能研究公司 OpenAI 发布的名为“ChatGTP”的人工智能聊天程序进入中国，迅速以其极高的智能化水平引起国内关注. 深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法，它是以神经网络为出发点的，在神经网络优化中，指数衰减的学习率模型为 $L=L_0D^{\frac{G}{G_0}}$，其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率，L_0 表示初始学习率，D 表示衰减系数，G 表示训练迭代轮数，G_0 表示衰减速度. 已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.8，衰减速度为 12，且当训练迭代轮数为 12 时，学习率衰减为 0.5. 则学习率衰减到 0.2 以下(不含 0.2)所需的训练迭代轮数至少为(参考数据：$\lg2\approx0.3010$)

A. 35　　B. 36　　C. 37　　D. 38

8. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=2$，$AC=\sqrt{7}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$PA\perp PB$ 且 $\angle BPC=\frac{2\pi}{3}$，则 $BP=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 5

9. 两个边长为 4 的正三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$，沿公共边 AB 折叠成 60° 的二面角，若点 A,B,C,D 在同一球 O 的球面上，则球 O 的表面积为

A. $\frac{80\pi}{9}$　　B. $\frac{208\pi}{9}$　　C. $\frac{64\pi}{3}$　　D. $\frac{112\pi}{3}$

10. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线分别交双曲线左、右两支于 A,B 两点，点 C 在 x 轴上，$\overrightarrow{CB}=5\overrightarrow{F_2A}$，$BF_2$ 平分 $\angle F_1BC$，则双曲线 Γ 的离心率为

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F 分别为线段 A_1B_1，BB_1 上的动点，过点 D，E，F 的平面截该正方体的截面记为 Ω，则下列命题正确的个数是

①当 $A_1E=2$ 时，$A_1C_1\perp$平面 Ω；

②当 E，F 分别为 A_1B_1，BB_1 的中点时，几何体 $A-DEF$ 的体积为 1；

③当 E 为 A_1B_1 中点且 $BF=\frac{1}{2}$时，Ω 与 BC 的交点为 G，满足 $BG=\frac{2}{7}$；

④当 E 为 A_1B_1 中点且 $0\leqslant B_1F\leqslant 1$ 时，Ω 为五边形.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 下列不等式中不成立的是

A. $e^{\cos 1-1}>\cos 1$　　B. $\pi\ln 4<4\ln\pi$

C. $\frac{2023^3+1}{2023^4+1}>\frac{2023^4+1}{2023^5+1}$　　D. $\log_{2022}2021<\log_{2024}2023$

第Ⅱ卷（非选择题，共 90 分）

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 二项式$(x^2-\frac{3}{x})^5$ 的展开式中含 x^4 的系数为________.

14. 曲线 $y=x^2-4x+1$ 与坐标轴交于 A，B，C 三点，则过 A，B，C 三点的圆的方程为________.

15. 已知函数 $f(x)=\cos 2x-\cos x$，$x\in[0,2\pi]$，对于下述四个结论：

①函数 $y=f(x)$的零点有三个；

②函数 $y=f(x)$关于 $x=\pi$ 对称；

③函数 $y=f(x)$的最大值为 2；

④函数 $y=f(x)$在$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$上单调递增.

其中所有正确结论的序号为：________.

16. 已知 $f'(x)$是函数 $f(x)$在其定义域上的导函数，且 $f'(x)-f(x)=e^{x+1}$，$f(1)=e^2$，若函数 $g(x)=\frac{mf(x)}{e^{2x}}-\ln(mx)+x-2(m>0)$在区间$(0,+\infty)$内存在零点，则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分

17．（12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，其前 n 项和为 S_n，且 a_2 是 a_1 和 a_5 的等比中项，$a_{2n}=2a_n+1(n\in N^*)$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若 $b_n=2^{a_n+1}$，令 $c_n=a_nb_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n．

18．（12 分）

某校为了深入学习宣传贯彻党的二十大精神，引导广大师生深入学习党的二十大报告，认真领悟党的二十大提出的新思想、新论断，作出的新部署、新要求，把思想统一到党的二十大精神上来，把力量凝聚到落实党的二十大作出的各项重大部署上来．经研究，学校决定组织开展“学习二十大 奋进新征程”的二十大知识竞答活动．

本次党的二十大知识竞答活动，组织方设计了两套活动方案：

方案一：参赛选手先选择一道多选题作答，之后都选择单选题作答；

方案二：参赛选手全部选择单选题作答．

其中每道单选题答对得 2 分，答错不得分；

多选题全部选对得 3 分，选对但不全得 1 分，有错误选项不得分．

为了提高广大师生的参与度，受时间和场地的限制，组织方要求参与竞答的师生最多答 3 道题．在答题过程中如果参赛选手得到 4 分或 4 分以上则立即停止答题，举办方给该参赛选手发放奖品．据统计参与竞答活动的师生有 500 人，统计如表所示：

	男生	女生	总计
选择方案一	100	80	
选择方案二	200	120	
总计			

（Ⅰ）完善上面列联表，据此资料判断，是否有 90％的把握认为方案的选择与性别有关？

（Ⅱ）某同学回答单选题的正确率为 0.8，各题答对与否相互独立，多选题完全选对的概率为 0.3，选对且不全的概率为 0.3；如果你是这位同学，为了获取更

好的得分你会选择哪个方案？请通过计算说明理由.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

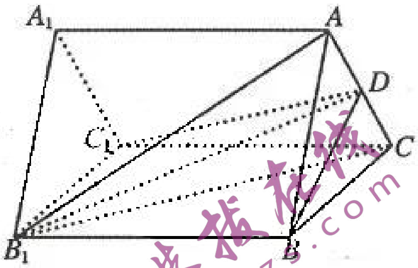
$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（12 分）

如图在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 AC 的中点，$AB=BC=2$，$\angle AA_1B_1=\angle B_1BC$.

（Ⅰ）证明：$BB_1\perp AC$；

（Ⅱ）若 $BB_1\perp BC$，直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$，二面角 $A-BB_1-C$ 的大小为 $60°$，求二面角 $B-B_1D-C_1$ 的余弦值.



20.（12 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，F 为椭圆的右焦点，A 为椭圆的下顶点，A 与圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 上任意点距离的最大值为 $3+\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点 D 在直线 $x=1$ 上，过 D 的两条直线分别交椭圆于 M,N 两点和 P,Q 两点，点 F 到直线 MN 和 PQ 的距离相等，是否存在实数 λ，使得 $|DM|\cdot|DN|=\lambda|DP|\cdot|DQ|$？若存在，求出 λ 的值，若不存在，请说明理由.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=x^2+a\ln(1-x),a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$有两个极值点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,求证:$f(x_1)-ax_2>-a$.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 在答题卷上将所选题号涂黑,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的方程为 $x=\sqrt{-y^2+2y}$,曲线 C_2 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta,\\ y=\cos\theta-\sin\theta,\end{cases}$($\theta$ 为参数). 以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(Ⅰ)求曲线 C_1,C_2 的极坐标方程;

(Ⅱ)若曲线 $C_3:\theta=\alpha$ 分别交曲线 C_1,C_2(不包括极点)于 A、B 两点,求$\frac{|OA|^2}{16}+\frac{1}{|OB|^2}$的最大值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知正实数 a,b,c.

(Ⅰ)若 x,y,z 是正实数,求证:$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$;

(Ⅱ)求$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$的最小值.

2023 年高中毕业年级第三次质量预测

理科数学　评分参考

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.

1－5.DADDB　　　6－10.ABBBA　　　11－12.CC

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．90；　　14. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$;　　15.②③④；　　16. $m\ge 1$.

三、解答题：

17.（12分）解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为$d\neq 0$，

又a_2是a_1和a_5的等比中项，得$a_2^{\ 2}=a_1a_5$，即$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，

即$d=2a_1$ ----------①----------2分

又$a_{2n}=2a_n+1(n\in N^*)$，取$n=1$时，$a_2=2a_1+1$，即$a_1+d=2a_1+1$ ----------②----------4分

将①②联立解得$a_1=1$，$d=2$，

$a_n=2n-1$ ----------6分

（2）由题意可知，$b_n=2^{2n}=4^n$，$c_n=(2n-1)\cdot 4^n$ ----------7分

$T_n=1\times4+3\times4^2+5\times4^3+\cdots+(2n-3)\times4^{n-1}+(2n-1)\times4^n$.

$4T_n=\quad 1\times4^2+3\times4^3+5\times4^4+\cdots+(2n-3)\times4^n+(2n-1)\times4^{n+1}$

$-3T_n=4+2\times4^2+2\times4^3+\cdots+2\times4^n-(2n-1)\times4^{n+1}$

$$-3T_n=4+2\times\frac{4^2-4\times4^n}{1-4}-(2n-1)\times4^{n+1}$$

$$-3T_n=-\frac{20}{3}+\left(\frac{5}{3}-2n\right)\times4^{n+1}$$

$$T_n=\frac{20}{9}+\left(\frac{2n}{3}-\frac{5}{9}\right)\times4^{n+1}.$$ ----------12分

18.解：（1）由题意完善列联表如图

	男生	女生	总计

选择方案一	100	80	180
选择方案二	200	120	320
总计	300	200	500

--2 分

故 $K^2=\dfrac{500\times(100\times120-200\times80)^2}{300\times200\times320\times180}\approx2.315<2.706$,

故没有90%的把握认为方案的选择与性别有关.--------------------------------------5 分

（2）设选择方案一的得分为 X，则 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3,4,5$，

则 $P(X=0)=0.4\times0.2\times0.2=0.016$, $P(X=1)=0.3\times0.2\times0.2=0.012$,

$P(X=2)=0.4\times2\times0.8\times0.2=0.128$, $P(X=3)=0.3\times0.2\times0.2+0.3\times2\times0.8\times0.2=0.108$,

$P(X=4)=0.4\times0.8\times0.8=0.256$,

$P(X=5)=0.3\times0.8+0.3\times0.2\times0.8+0.3\times0.8\times0.8=0.480$,

故 X 的数学期望 $E(X)=1\times0.012+2\times0.128+3\times0.108+4\times0.256+5\times0.480=4.016$.----------------------8 分

设选择方案二的得分为 Y,则 Y 的可能取值为 $0,2,4$,

则 $P(Y=0)=0.2\times0.2\times0.2=0.008$, $P(Y=2)=3\times0.8\times0.2\times0.2=0.096$,

$P(Y=4)=0.8\times0.8+2\times0.8^2\times0.2=0.896$,

故 $E(Y)=2\times0.096+4\times0.896=3.776$,--------------------------------------11 分

因为 $E(X)>E(Y)$,故为了获取更好的得分,我会选择方案一.----------------------------12 分

19. （12 分）

解：（1）证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1=B_1B$， $\angle AA_1B_1=\angle B_1BC$， $A_1B_1=AB=BC$，

$\therefore \Delta AA_1B_1\cong\Delta B_1BC$， $\therefore AB_1=CB_1$，

又 D 为 AC 的中点，$\therefore B_1D\perp AC$，

在 ΔABC 中，$\because AB=BC$， $AD=DC$， $\therefore BD\perp AC$，

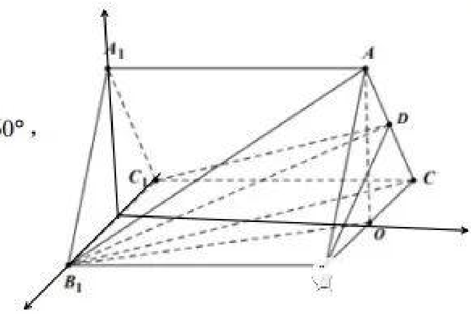
$\because B_1D\bigcap BD=D$， B_1D、 $BD\subset$ 平面 BDB_1， $\therefore AC\perp$ 平面 BDB_1，

又 $BB_1\subset$ 平面 BDB_1， $\therefore AC\perp BB_1$.--------------------------------------5 分

（2）$\because BB_1\perp$ 平面 ABC， $\therefore BB_1\perp AB$， $BB_1\perp BC$，

$\therefore \angle ABC$ 为二面角 $A-BB_1-C$ 的平面角，即 $\angle ABC=60°$，

$\therefore \Delta ABC$ 为等边三角形，即 $AC=2$，



过点 A 作 $AO\perp BC$ 于点 O，则 $AO=\sqrt{3}$，

又∵平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$，

$\therefore AO\perp$ 平面 BCC_1B_1，

故直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\angle AB_1O$，即 $\sin\angle AB_1O=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$，

设 $BB_1=y$，则 $\sin\angle AB_1O=\dfrac{AO}{AB_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y^2+4}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}\Rightarrow y=3$，即 $BB_1=3$，--------------------------------7 分

∵平面 $ABC\perp$ 平面 B_1BCC_1 ∴平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 B_1BCC_1，

∵ $AB=BC$，$\angle BAC=60°$ ∴ ΔABC 是等边三角形．

取 O_1 为 B_1C_1 中点，∴ $A_1O_1\perp B_1C_1$，

∵平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 B_1BCC_1，平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $B_1BCC_1=B_1C_1$，

∴ $A_1O_1\perp$ 平面 B_1BCC_1

以 O_1 为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系，

则 $B_1(1,0,0)$，$C_1(-1,0,0)$，$B(1,3,0)$，$D(-\frac{1}{2},3,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{B_1B}=(0,3,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{C_1D}=(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

设平面 BB_1D 与平面 C_1B_1D 的一个法向量分别为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1B}=3y_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{3}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，得 $\vec{m}=(1,0,\sqrt{3})$；

同理 $\vec{n}=(0,1,-2\sqrt{3})$．--------------------------------10 分

$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-6}{2\times\sqrt{13}}=-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$．

∴二面角 $B-B_1D-C_1$ 的余弦值 $-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$．--------------------------------12 分

20.（12 分）

解（1）由题意可知 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$A(0,-b)$，

又 A 到圆上距离最大值为 $2-(-b)+1=3+b=3+\sqrt{3}$，$\therefore b=\sqrt{3}$．

又 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $a^2=4$，$b^2=3$．

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ --4 分

（2）若 D 点与 F 点重合，则 λ 不存在--1 分

若 D 点与 F 点不重合

∵点 F 到直线 MN 和 PQ 的距离相等，且 F 在直线 $x=1$ 上，

∴ $k_{MN}+k_{PQ}=0$ --5 分

设 $D(1,m)$，由题意可知直线 MN，PQ 的斜率均存在且不为 0，来源：高三答案公众号

设直线 MN 的方程为 $y-m=k_1(x-1)$ $(k_1\neq 0)$，

由 $\begin{cases} y-m=k_1(x-1) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$ 得，$(4k_1^2+3)x^2+(8k_1m-8k^2)x+4k_1^2+4m^2-8k_1m-12=0$.

设 $M(x_M,\ y_M)$，$N(x_N,\ y_N)$，

则 $x_M+x_N=\frac{8k_1^2-8k_1m}{4k_1^2+3}$，$x_M\cdot x_N=\frac{4k_1^2+4m^2-8k_1m-12}{4k_1^2+3}$ --7 分

又 $|DM|=\sqrt{1+k_1^2}|x_M-1|$，$|DN|=\sqrt{1+k_1^2}|x_N-1|$，

$|DM|\cdot|DN|=(1+k_1^2)|(x_M-1)(x_N-1)|=(1+k_1^2)|x_Mx_N-(x_M+x_N)+1|=(1+k_1^2)\left|\frac{4m^2-9}{4k_1^2+3}\right|$

设直线 PQ 的方程为 $y-m=k_2(x-1)(k_2\neq 0)$，

同理可得 $|DP|\cdot|DQ|=(1+k_2^2)\left|\frac{4m^2-9}{4k_2^2+3}\right|$ --11 分

又 $k_1=-k_2$，∴ $|DM|\cdot|DN|=|DP|\cdot|DQ|$，　故 $\lambda=1$.

所以存在这样的 $\lambda=1$，使得 $|DM|\cdot|DN|=\lambda|DP|\cdot|DQ|$ --12 分

21.（12 分）

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$，$f'(x)=\frac{-2x^2+2x-a}{1-x}$，

设 $g(x)=-2x^2+2x-a$，令 $g(x)=0$，$\Delta=4-8a$，

当 $\Delta\le 0$ 时，即 $a\ge\frac{1}{2}$，$f'(x)\le 0, f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，

当$\Delta>0$时，即，$a<\dfrac{1}{2}$，令$g(x)=0$，得$x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$，

若$a\le 0$，$x_1<1$，$x_2\ge 1$，由$f'(x)<0$即$g(x)<0$，得出$x\in(-\infty,x_1)$.

由$f'(x)>0$即$g(x)>0$，得出$x\in(x_1,1)$.

当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，$x_2<1$，由$f'(x)<0$即$g(x)<0$，得出$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,1)$.

由$f'(x)>0$即$g(x)>0$，得出$x\in(x_1,\ x_2)$.

综上所述：当$a\ge\dfrac{1}{2}$时，函数$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，

当$a\le 0$时，函数$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2},1\right)$上单调递增，

当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，函数$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$上单调递减，

在$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2},\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2},1\right)$上单调递减.----------------------------------5 分

（2）由（1）可知：当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$是函数$f(x)$两个极值点，

有$x_1+x_2=1,x_1x_2=\dfrac{a}{2}$,此时$\dfrac{1}{2}<x_2<1$，

要证明$f(x_1)-ax_2>-a$，只要证明$\dfrac{1}{a}f(x_1)-x_2>-1$，

-----------------------9 分

$\dfrac{1}{a}f(x_1)-x_2=\dfrac{x_1^2+a\ln(1-x_1)}{a}-x_2=\dfrac{x_1^2}{a}+\ln(1-x_1)-x_2$，

$=\dfrac{x_1^2}{2x_1x_2}+\ln x_2-x_2=\dfrac{x_1}{2x_2}+\ln x_2-x_2=\dfrac{1-x_2}{2x_2}+\ln x_2-x_2=\dfrac{1}{2x_2}-\dfrac{1}{2}+\ln x_2-x_2$，

设$h(x)=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2}+\ln x-x$，$\dfrac{1}{2}<x<1$，

$h'(x)=\dfrac{-1}{2x^2}+\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{-2x^2+2x-1}{2x^2}$，

令$M(x)=-2x^2+2x-1$，当$x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$时，$-1<M(x)<-\dfrac{1}{2}$，

所以当$x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

所以有 $h(x)>h(1)=-1$，即证 $f(x_1)-ax_2>-a$ ----------12 分

二选考题:共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

解：（1）曲线 C_1 的方程可化为 $x^2+(y-1)^2=1(0\le x\le 1)$，

又 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$.

曲线 C_2 中，$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2=2$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

所以 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2(1+\sin^2\theta)=4$ ----------5 分

（2）由题意可知：$|OA|^2=\rho_A^2=4\sin^2\alpha$，　$|OB|^2=\rho_B^2=\frac{4}{1+\sin^2\alpha}$，

所以 $\frac{|OA|^2}{16}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{\sin^2\alpha}{4}+\frac{1+\sin^2\alpha}{4}=\frac{1+2\sin^2\alpha}{4}$.

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{|OA|^2}{16}+\frac{1}{|OB|^2}$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$ ----------10 分

23.[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

解：（1）由柯西不等式易知，

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\ge\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}+\frac{c}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z}\right)^2=(a+b+c)^2,$$

因为 x，y，z 都为正数，所以 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$，

当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ 时，等号成立.----------5 分

（2）$\because a$、b、c 为正数，所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$\ge ab+ac+bc+2ab+2bc+2ac=3(ab+bc+ac)$

由（1）可得 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ab+cb}+\frac{c^2}{ac+bc}$

$\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)}\ge\frac{3(ab+bc+ac)}{2(ab+bc+ac)}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

所以 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$. ……………………………………………………………………10 分