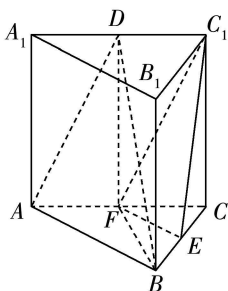


所以平面 $ABD \parallel$ 平面 FEC_1 (5分)

(II) 如图所示, 连接 BF, DF .



利用勾股定理计算得 $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}, AD = \sqrt{AA_1^2 + A_1D^2} = \sqrt{5}, BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{5}$,

所以 $\triangle ABD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB \times \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{51}}{4}$ (7分)

设点 F 到平面 ABD 的距离为 h , 则三棱锥 $F-ABD$ 的体积为 $V = \frac{1}{3}h \times \frac{\sqrt{51}}{4} = \frac{\sqrt{51}}{12}h$ (9分)

又易知 $DF \perp$ 平面 ABC ,

所以三棱锥 $D-ABF$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \times DF \times S_{\triangle ABF} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (10分)

所以 $\frac{\sqrt{51}}{12}h = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 解得 $h = \frac{2\sqrt{17}}{17}$,

即点 F 到平面 ABD 的距离为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ (12分)

20. 解析 (I) 由 $F(2,0)$ 得 C 的半焦距为 $c=2$, (1分)

所以 $a^2 = b^2 + 4$, (2分)

又 C 过点 $(2,3)$,

所以 $\frac{4}{b^2+4} + \frac{9}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 12$, (3分)

所以 $a^2 = 16, a=4$, (4分)

故 C 的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ (5分)

(II) 由 (I) 可知 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), P(8, y_0)$.

由题意可得直线 MN 的方程为 $y = x - 2$, (6分)

$$\text{联立} \begin{cases} y = x - 2, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 可得 } 7x^2 - 16x - 32 = 0,$$

则 $x_1 + x_2 = \frac{16}{7}, x_1 x_2 = -\frac{32}{7}$, (7分)

$$\begin{aligned} \text{则 } k_{PM} + k_{PN} &= \frac{y_0 - y_1}{8 - x_1} + \frac{y_0 - y_2}{8 - x_2} = \frac{(y_0 - x_1 + 2)(8 - x_2) + (y_0 - x_2 + 2)(8 - x_1)}{(8 - x_1)(8 - x_2)} \\ &= \frac{16y_0 + 32 + 2x_1 x_2 - (y_0 + 10)(x_1 + x_2)}{64 + x_1 x_2 - 8(x_1 + x_2)} \end{aligned} \quad \text{..... (8分)}$$

$$= \frac{16y_0 + 32 + 2\left(-\frac{32}{7}\right) - \frac{16}{7}(y_0 + 10)}{64 - \frac{32}{7} - 8 \times \frac{16}{7}} \dots\dots\dots (9 \text{分})$$

$$= \frac{y_0}{3}, \dots\dots\dots (10 \text{分})$$

又 $k_{PF} = \frac{y_0 - 0}{8 - 2} = \frac{y_0}{6}$, $\dots\dots\dots (11 \text{分})$

因此 $k_{PM} + k_{PN} = 2k_{PF}$. $\dots\dots\dots (12 \text{分})$

21. 解析 (I) 由已知得 $f'(x) = \frac{x^2 - 2ax + 9}{x^4}$. $\dots\dots\dots (1 \text{分})$

若 $a \leq 0$, 则当 $x > 0$ 时, $x^2 - 2ax + 9 > 0$ 恒成立, 所以 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 单调递增. $\dots\dots\dots (2 \text{分})$

由 $\Delta = (-2a)^2 - 36 \leq 0$ 可得 $-3 \leq a \leq 3$,

若 $0 < a \leq 3$, 则当 $x > 0$ 时, $x^2 - 2ax + 9 \geq 0$ 恒成立, 所以 $f'(x) \geq 0$, 故 $f(x)$ 单调递增. $\dots\dots\dots (3 \text{分})$

若 $a > 3$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x_1 = a - \sqrt{a^2 - 9}$, $x_2 = a + \sqrt{a^2 - 9}$, 其中 $x_1, x_2 > 0$,

当 $0 < x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. $\dots\dots\dots (4 \text{分})$

综上: 若 $a \leq 3$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 若 $a > 3$, 则 $f(x)$ 在 $(0, a - \sqrt{a^2 - 9})$ 和 $(a + \sqrt{a^2 - 9}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a - \sqrt{a^2 - 9}, a + \sqrt{a^2 - 9})$ 上单调递减. $\dots\dots\dots (5 \text{分})$

(II) 由不等式 $f(x) \leq \frac{2\ln x}{x^2}$, 得 $-\frac{3}{x^3} + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2\ln x}{x^2}$, 则 $a \leq 2\ln x + x + \frac{3}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

设函数 $h(x) = 2\ln x + x + \frac{3}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$,

因为存在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$, 使 $a \leq h(x)$, 所以 $a \leq h(x)_{\max}$. $\dots\dots\dots (6 \text{分})$

求导得 $h'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$,

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ ($x = -3$ 舍去), $\dots\dots\dots (7 \text{分})$

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (1, 4)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, 4)$ 上单调递增, 所以 $h(x)_{\max} = \max\left\{h\left(\frac{1}{2}\right), h(4)\right\}$. $\dots\dots\dots (9 \text{分})$

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln \frac{1}{2} + \frac{13}{2}$, $h(4) = 4\ln 2 + \frac{19}{4}$,

且 $h(4) - h\left(\frac{1}{2}\right) = 4\ln 2 + \frac{19}{4} - 2\ln \frac{1}{2} - \frac{13}{2} = 6\ln 2 - \frac{7}{4} > 0$,

所以 $h(4) > h\left(\frac{1}{2}\right)$, $\dots\dots\dots (11 \text{分})$

所以 $a \leq 4\ln 2 + \frac{19}{4}$, 即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, 4\ln 2 + \frac{19}{4}\right]$. $\dots\dots\dots (12 \text{分})$

22. 解析 (I) 由曲线 C 的参数方程消去参数 α , 得普通方程为 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 6$. $\dots\dots\dots (2 \text{分})$

因为 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 所以 $\frac{\sqrt{3}\rho \sin \theta}{2} - \frac{\rho \cos \theta}{2} = 1$, 将 $\rho \cos \theta = x$, $\rho \sin \theta = y$ 代入得 $\sqrt{3}y - x = 2$. $\dots\dots\dots (4 \text{分})$

(II) 由于直线 l 与 x 轴的交点坐标为 $(-2, 0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, (5分)

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), (6分)

代入 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 6$, 得 $t^2 - 4\sqrt{3}t + 6 = 0$,

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = 4\sqrt{3}, t_1 t_2 = 6$, (8分)

所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 36$ (10分)

23. 解析 (I) 由 $f(x) + 2 \leq g(x)$, 可得 $2|x+1| + 2 \leq 4 + |2x-1|$, (1分)

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式可化为 $2(x+1) + 2 \leq 4 + (2x-1)$, 化简得 $4 \leq 3$, 不成立; (2分)

当 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式可化为 $2(x+1) + 2 \leq 4 - (2x-1)$, 解得 $x \leq \frac{1}{4}$, 故 $-1 < x \leq \frac{1}{4}$; (3分)

当 $x \leq -1$ 时, 原不等式可化为 $-2(x+1) + 2 \leq 4 - (2x-1)$, 化简得 $0 \leq 5$, 恒成立, 故 $x \leq -1$ (4分)

综上可知 x 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{4}]$ (5分)

(II) 因为 $f(x) + g(x) = |2x+2| + 4 + |2x-1| \geq |2x+2 - (2x-1)| + 4 = 7$, (7分)

由题可知关于 x 的不等式 $f(x) + g(x) \geq 2a^2 - 13a$ 的解集为 \mathbf{R} , 所以 $7 \geq 2a^2 - 13a$, (8分)

解得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 7$.

故实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 7]$ (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

