题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	B	A	C	B	A	C	D	BD	BD	AD	ABC

1. C 【解析】$\because A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty),B=\mathbf{R},\therefore A\cap B=\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$. 故选 C.

2. B 【解析】对于 A，当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向可以既不相同也不相反；对于 C，当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{a}$ 为非零向量时，λ 不存在；对于 D，$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{3}$. 故选 B.

3. A 【解析】由图象或定义可知，故选 A.

4. C

5. B 【解析】$\because |a_0|+|a_1|+\cdots+|a_5|=(3\times 1+1)^5=1024$，又 $|a_0|=1$. 故选 B.

6. A 【解析】$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{3a_n-1}{a_n+1}-a_n=\dfrac{-(a_n-1)^2}{a_n+1}<0$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是非增数列，且 $a_1\neq 1$，$\therefore a_n<a_1=2$. 故选 A.

7. C 【解析】方法一：由 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\end{cases}$ 可得 $k=33$. 故选 C.

方法二：$\because(100+1)\times\dfrac{1}{3}=33\dfrac{2}{3}$，$\therefore$ 当 $k=\left[33\dfrac{2}{3}\right]=33$ 时最大. 故选 C.

8. D 【解析】设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，当 $f(x)=m(m>0)$ 有两个根 x_1,x_2 时，

由极值点偏移可知 $x_1+x_2>2\mathrm{e}$（设 $x_1<x_2$）.

$\therefore$ 由 $f(x)$ 的图象可知 $f(\mathrm{e}+0.1)>f(\mathrm{e}-0.1)$，$\therefore c>a$.

令 $g(x)=(\mathrm{e}-x)\ln(\mathrm{e}+x)$，则 $g'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}+x}-\ln(\mathrm{e}+x)-1$，

$\therefore g'(x)$ 在 $(-\mathrm{e},+\infty)$ 为减函数，又 $g'(0)=0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\mathrm{e},0)$ 为增函数，在 $(0,+\infty)$ 为减函数，

$\therefore g(0)>g(0.1)$ 且 $g(0)>g(-0.1)$，$\therefore b>c$，故选 D.

9. BD 【解析】$z=\mathrm{i}$ 时，$z^2=-1$，$|z|^2=1$，$\therefore$ A 错；

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，$\therefore z+\bar{z}=2a\in\mathbf{R}$，$\therefore$ B 对；

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}(a_1,b_1\in\mathbf{R})$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}(a_2,b_2\in\mathbf{R})$，

由 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ 可得 $|z_1+z_2|^2=(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=|z_1-z_2|^2=(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2$，

$\therefore a_1a_2+b_1b_2=0$，

而 $z_1z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)\mathrm{i}=2a_1a_2+(a_1b_2+b_1a_2)\mathrm{i}$，不一定为 0，$\therefore$ C 错；

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$ 为纯虚数.

$\therefore\begin{cases}a^2-b^2=0,\\2ab\neq 0,\end{cases}\therefore\begin{cases}|a|=|b|,\\ab\neq 0.\end{cases}$ $\therefore$ D 对. 故选 BD.

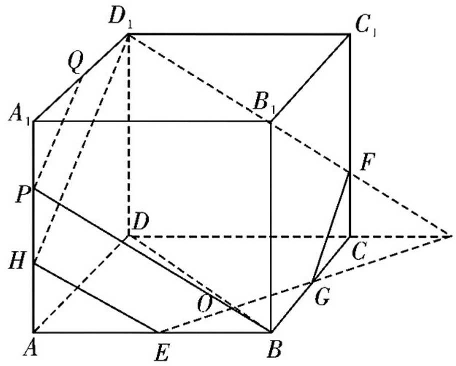
10. BD 【解析】令 $x=y=0$，则 $f(0)+f(0)=2f(0)\cdot f(0)$，$\therefore f(0)=0$ 或 1.

令 $y=x$，则 $f(x)+f(x)=2f(x)\cdot f(0)$，若 $f(0)=0$，则 $f(x)=0$，与 $f(x)$ 不恒为 0 矛盾，$\therefore f(0)=1$，$\therefore$ B 对；

令 $y=-x$，则 $f(x)+f(-x)=2f(0)\cdot f(x)=2f(x)$，$\therefore f(x)=f(-x)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数，$\therefore$ D 对. 故选 BD.

11. AD 【解析】对于 B，$S_{\triangle BF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}=b^2\times 1=4$；对于 C，最短的弦应该是两顶点的连线段，长度为 2. 故选 AD.

12. ABC 【解析】如图，分别取点，满足 $A_1P=PH=HA$，$A_1Q=QD_1$，$BG=GC$，



再如图连接，则易得平面 PQB // 平面 D_1EF，

∴点 M 的轨迹为线段 PQ，∴A 对；

连接 BD，交 EG 于点 O，

则 $\angle D_1OD$ 为平面 D_1EF 与平面 $ABCD$ 的夹角，∴B 对；

通过计算 C 对；对于 D 存在直线 l，如直线 BD_1. 故选 ABC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-\sqrt{3}$ 【解析】原式$=\dfrac{2\sin(30°-10°)-\cos 10°}{\sin 10°}=\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)-\cos 10°}{\sin 10}=-\sqrt{3}$.

14. 90 【解析】$C_6^2C_4^2C_2^2=90$.

15. $e^{-\frac{1}{e}}$ 【解析】∵$f(x)=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$，设 $g(x)=x\ln x(x>0)$，∴$g'(x)=\ln x+1$，∴$g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上递减，在区间 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上递增，∴$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，∴$f(x)_{\min}=e^{-\frac{1}{e}}$.

16. $2\sqrt{3}$ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设 $l_{AB}:mx+ny=1$，又 $y^2=2x$，∴$y^2=2x(mx+ny)$，

∴$y^2-2nxy-2mx^2=0$，∴$\left(\frac{y}{x}\right)^2-2n\cdot\frac{y}{x}-2m=0$.

∴$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=k_{OA}\cdot k_{OB}=-2m=-2$，∴$m=1$，

∴直线 AB 恒过点 $Q(1,0)$，

由图可知，当直线 $AB\perp QE$ 时，弦长最短，且最小值为 $2\sqrt{3}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)∵$a_n^2-(n-1)a_na_{n-1}-na_{n-1}^2=0$，

∴$(a_n-na_{n-1})(a_n+a_{n-1})=0(n\geqslant 2)$，

又 $a_n>0$，∴$a_n=na_{n-1}$，∴$\frac{a_n}{a_{n-1}}=n(n\geqslant 2)$. ………… 3 分

又 $a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times 2\times 3\times\cdots\times n=n!\ (n\geqslant 2)$，

且 $a_1=1=1!$，∴$a_n=n!$. ………… 6 分

(2)$b_n=\frac{n-1}{n!}$，∴$b_1=0$，$b_n=\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}(n\geqslant 2)$， ………… 8 分

∴$S_n=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n=0+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$，

又 $S_1=b_1=1-\frac{1}{1!}=0$，

∴$S_n=1-\frac{1}{n!}$. ………… 10 分

18.【解析】(1)根据正弦定理可得：$\sqrt{2}bc=b^2+c^2-a^2$，

又 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，∴$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$A=\frac{\pi}{4}$. ………… 5 分

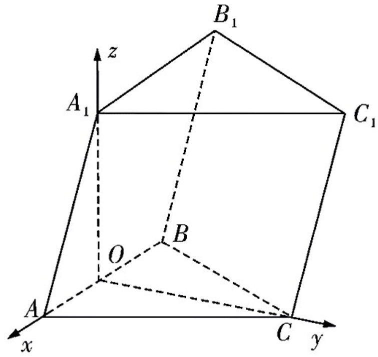
(2)$a^2=2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-\sqrt{2}bc\geqslant(2-\sqrt{2})bc$，∴$bc\leqslant 2+\sqrt{2}$，

当且仅为 $b=c$ 时取等号，∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，∴$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times a\times AD=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times AD\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，

$\therefore AD\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore AD$ 的最大值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由题意知 $A_1O\perp$ 平面 ABC，又 $AA_1=2$，$\angle A_1AO=60°$，



$\therefore A_1O=\sqrt{3}$，以 O 点为原点，如图建立空间直角坐标系，

则 $A_1(0,0,\sqrt{3})$，$A(1,0,0)$，$B(-1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ 得 $B_1(-2,0,\sqrt{3})$，同理得 $C_1(-1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

设 $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BB_1}$，得 $D(-1-t,0,\sqrt{3}t)$，

又 $\overrightarrow{AC_1}=(-2,\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1D}=(-1-t,0,\sqrt{3}t-\sqrt{3})$，

由 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0$，得 $-2(-1-t)+\sqrt{3}(\sqrt{3}t-\sqrt{3})=0$，

得 $t=\frac{1}{5}$，又 $BB_1=2$，$\therefore BD=\frac{2}{5}$.

$\therefore$ 存在点 D 且 $BD=\frac{2}{5}$ 满足条件. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BC}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$.

又 $\overrightarrow{BA_1}=(1,0,\sqrt{3})$，$\therefore$ 点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $d=|\overrightarrow{BA_1}||\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\left||\overrightarrow{BA_1}|\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BA_1}|\times\sqrt{5}}\right|$

$=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

$\therefore$ 所求距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1) $P=\frac{C_3^1C_6^4}{C_9^5}=\frac{5}{14}$. ……………………………………………………………………………………… 3 分

(2) $P=1-\frac{C_3^2\times(C_3^3\times C_3^2\times 2)}{C_9^5}=\frac{6}{7}$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(3)由题意可知 X 的取值为 0，1，2，

$P(X=1)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}\times\frac{C_2^1C_7^4}{C_9^5}+\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}\times\frac{C_1^1C_8^4}{C_9^5}=\frac{4}{9}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}\times\frac{C_2^2C_7^3}{C_9^5}=\frac{1}{18}$，

$P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)=\frac{1}{2}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$

…… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{18}=\frac{5}{9}$. ………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=2\cos x-2\cos 2x=2\cos x-2(2\cos^2x-1)=(-\cos x+1)(4\cos x+2)$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，

又 $f(0)=0, f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}, f(\pi)=0$.

$\therefore f(x)_{\max}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)设 $g(x)=f(x)-\ln(x+1)=2\sin x-\sin 2x-\ln(x+1)$，

$\therefore g'(x)=-4\cos^2 x+2\cos x+2-\frac{1}{x+1}$，

$\therefore$当 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$1-\frac{1}{x+1}>0$，$\therefore g'(x)>-4\cos^2 x+2\cos x+1$，

又 $-4\cos^2 x+2\cos x+1=-4\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4}\left(0\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore -4\cos^2 x+2\cos x+1>0$ 恒成立.

$\therefore g'(x)>0$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立.

$\therefore y=g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数，

$\therefore g(x)\geqslant g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\left(\frac{\pi}{3}+1\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-0.739>0$，

$\therefore$当 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>\ln(x+1)$. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)直线 l_{AB} 过定点 $(0,0)$，下面证明：

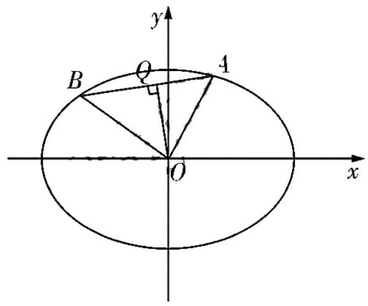
设 $A(x_1,y_1), B(-x_1,-y_1)$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\times\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$，

又 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1, \frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1-\frac{x_0^2}{4}-\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}{x_0^2-x_1^2}=\frac{-\frac{x_0^2-x_1^2}{4}}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{1}{4}$，

$\therefore$直线 l_{AB} 过原点满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$.

$\therefore$直线 l 过定点 $(0,0)$. ………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)设 $|OA|=r_1, |OB|=r_2, \angle AOx=\theta, \angle BOx=\theta+\frac{\pi}{2}$，



$\therefore A(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta), B(-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$，又点 A,B 在椭圆上，

$\therefore \frac{r_1^2\cos^2\theta}{4}+r_1^2\sin^2\theta=1, \frac{r_2^2\sin^2\theta}{4}+r_2^2\cos^2\theta=1$，

$\therefore \frac{\cos^2\theta}{4}+\sin^2\theta=\frac{1}{r_1^2}, \frac{\sin^2\theta}{4}+\cos^2\theta=\frac{1}{r_2^2}$，两式相加得 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{5}{4}$，

由 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|OQ|=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|$，

得 $|OQ|=\frac{|OA|\cdot|OB|}{|AB|}=\frac{r_1r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}=\sqrt{\frac{r_1^2r_2^2}{r_1^2+r_2^2}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_1^2}}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$点 Q 的轨迹是以点 O 为圆心，以 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 为半径的圆，

$\therefore$点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\frac{4}{5}$. ……………………………………………………………… 12 分