衡水中学金卷先享题信息卷四 文科数学试题及答案

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{-1,0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{-1,0,1,2,3\}$　B. $\{-1,0,1,2\}$　C. $\{0,1,2\}$　D. $\{0\}$

解析：由题知，$A=\{x|x^2-2x-3<0,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|-1<x<3,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1,2\}$，则 $A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，故选B.

答案：B

2. 已知函数 $f(x)=|x|+x^2-1$，则函数 $y=f(x)$ 的零点的个数是

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解析：构造函数 $y=|x|$ 和函数 $y=1-x^2$，因为两个函数的图象有两个交点，所以函数 $y=f(x)$ 有两个零点. 故选B.

答案：B

3. 在复平面内，复数 $z=\frac{1}{2+i}+i^{2018}$（i为虚数单位），则下列结论中正确的是

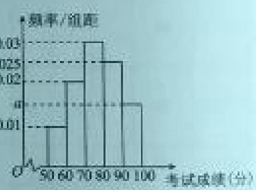
①复数 z 在复平面内对应的点在第二象限；② $|z|=\frac{\sqrt{10}}{5}$；③ $\bar{z}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$；④ $z^2+z=-\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i$.

A. ①④　B. ②④　C. ③④　D. ②③

解析：$\because z=\frac{1}{2+i}+i^{2018}=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}+(i^4)^{504}\cdot i^2=-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$，$\therefore$ 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $\left(-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$，位于第三象限；$|z|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$；$\bar{z}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$；$z^2+z=z(z+1)=-\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i$，所以正确的是②④. 故选B.

答案：B

4. 某市为了调查学生的考试成绩，在全市范围内随机抽取了所有四年级学生的考试成绩进行评估，将考试成绩进行分组，分组区间为 $[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，并绘制出频率分布直方图，如图所示. 若从该市随机选取一名四年级学生，估计这名学生的考试成绩低于90分的概率是



A. 0.01　B. 0.65　C. 0.85　D. 0.10

解析：根据频率分布直方图知，$(0.01+0.02+0.03+0.025+a)\times10=1$，解得 $a=0.015$. 用频率估计概率，得这名学生的考试成绩低于90分的概率为 $1-0.015\times10=0.85$. 故选C.

答案：C

5. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图象

A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位　B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位　D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

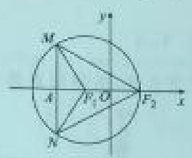
解析：由题得，$y=\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到函数 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象. 故选B.

答案：B

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，以 F_1 为圆心，$|F_1F_2|$ 为半径的圆与 C 的左支相交于 M，N 两点，若 $\triangle MNF_2$ 是等边三角形，则 C 的离心率是

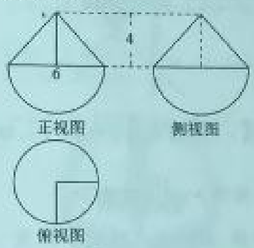
A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

解析：∵$\triangle MNF_2$ 是等边三角形，∴$\angle MF_2N=60^\circ$，∴$\angle MF_1N=120^\circ$. 设 MN 交 x 轴于点 A，则 $|AF_1|=\frac{1}{2}|F_1M|=c$，$|MA|=\sqrt{3}c$. 不妨设点 M 在第二象限，则 $M(-2c,\sqrt{3}c)$，代入双曲线方程，可得 $\frac{4c^2}{a^2}-\frac{3c^2}{b^2}=1$，即 $\frac{4c^2}{a^2}-\frac{3c^2}{c^2-a^2}=1$，∴$4e^2-\frac{3e^2}{e^2-1}=1$，解得 $e^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}舍\right)$，∴$e=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.



答案：B

7. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是

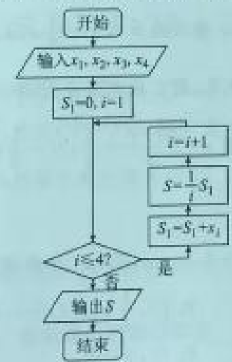


A. 37π　　B. 27π　　C. 7π　　D. 4π

解析：根据三视图可知，该几何体是一个半球与一个四分之三圆锥构成，半球半径是 3，圆锥的底面半径是 3，高是 4，所以圆锥的体积 $V_{圆锥}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\pi\times3^2\times4=9\pi$，半球的体积 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times3^3=18\pi$，所以该几何体的体积是 27π. 故选 B.

答案：B

8. 某科室为了调查劳务报酬所得收入情况，对某月收入情况进行抽样调查，其中 4 位人员月收入分别是 x_1，x_2，x_3，x_4，根据如图所示的程序框图，若 x_1，x_2，x_3，x_4 分别为 1，2，1.5，0.5，则输出 S 的值为



A. 0.6　　B. 0.8　　C. 1　　D. 1.25

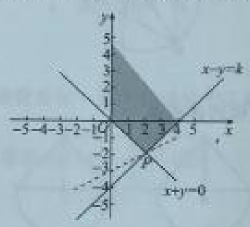
解析：运行程序框图，第一次循环：$S_1=0+x_1=1$，$S=\frac{1}{1}=1$，$i=2$；第二次循环：$S_1=1+x_2=3$，$S=\frac{3}{2}=1.5$，$i=3$；第三次循环：$S_1=3+x_3=4.5$，$S=\frac{4.5}{3}=1.5$，$i=4$；第四次循环：$S_1=4.5+x_4=5$，$S=\frac{5}{4}=1.25$，$i=5$，$i=5>4$，结束循环，输出 $S=1.25$. 故选 D.

答案：D

9. 已知点 $M(x,y)$ 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x-y\leqslant k\end{cases}$（$k$ 为常数），点 $A(1,-2)$，若 $z=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$（$O$ 为坐标原点）的最大值为 8，则 $k=$

A. -3　　B. 3　　C. 4　　D. $\frac{16}{3}$

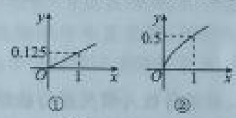
解析：分析可得 $k>0$，画出满足条件的平面区域，如图阴影部分所示：



由 $\begin{cases}x+y=0,\\ x-y=k,\end{cases}$ 解得 $P\left(\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\right)$，将 $z=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 转化为 $z=x-2y$，即 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，显然直线过点 $P\left(\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\right)$ 时，z 最大，z 的最大值为 $\frac{k}{2}+k=8$，解得 $k=\frac{16}{3}$. 故选 D.

答案：D

10. 近年来，"共享单车"的出现为市民"绿色出行"提供了极大的方便，某共享单车公司"Mobike"计划在甲、乙两座城市共投资 20 万元，根据前期市场调研可知：甲城市收益 y 与投资额 x（单位：万元）成正比，其关系如图①，乙城市收益 y 与投资额 x（单位：万元）的算术平方根成正比，其关系如图②. 则总收益的最大值是



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析：由题得，甲城市收益 y 与投资额 x 满足关系式 $y=\frac{1}{8}x(x\geqslant 0)$，乙城市收益 y 与投资额 x 满足关系式 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}(x\geqslant 0)$. 假设甲城市投资 x 万元，则乙城市投资为 $20-x$ 万元. 则总收益 $z=\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\sqrt{20-x}$ $(0\leqslant x\leqslant 20)$，令 $t=\sqrt{20-x}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\sqrt{5})$，则 $z=\frac{20-t^2}{8}+\frac{1}{2}t=-\frac{1}{8}(t-2)^2+3$，所以当 $t=2$，即 $x=16$ 万元时，总收益最大为 3 万元. 故选 A.

答案：A

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}\cdot a_n=2a_n^2-3a_n+2$，$a_1=a$. 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,1)\cup(2,+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

C. $(0,2)$　　D. $(1,+\infty)$

解析：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}\cdot a_n=2a_n^2-3a_n+2$，即 $a_{n+1}=2a_n+\frac{2}{a_n}-3$，所以 $a_{n+1}-a_n=a_n+\frac{2}{a_n}-3$. 因为

$\{a_n\}$为单调递增数列，所以$a_{n+1}-a_n>0$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，即$a_n+\frac{2}{a_n}-3>0$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立。当$n=1$时，$a_1+\frac{2}{a_1}-3>0$，即$a+\frac{2}{a}-3>0$。当$a<0$时，不等式无解，当$a>0$时，解得$0<a<1$或$a>2$。当$n=2$时，$a_2+\frac{2}{a_2}-3>0$，而$a_2=2a_1+\frac{2}{a_1}-3=2a+\frac{2}{a}-3$，所以$2a+\frac{2}{a}-3+\frac{2}{2a+\frac{2}{a}-3}-3>0$，令$t=2a+\frac{2}{a}-3$，显然$t>0$（否则上式不成立），所以$t+\frac{2}{t}-3>0$，解得$0<t<1$或$t>2$，即$0<2a+\frac{2}{a}-3<1$或$2a+\frac{2}{a}-5>0$。由$-1<2a+\frac{2}{a}-4<0$，解得$a\in\varnothing$；由$2a+\frac{2}{a}-5>0$，解得$0<a<\frac{1}{2}$或$a>2$。综上可知，$0<a<\frac{1}{2}$或$a>2$。故选B.

答案：B

12. 若对任意的$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin 2x-1-2a(\cos x-\sin x)+4a\geqslant 0$恒成立，则实数$a$的取值范围是

A. $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $[0,+\infty)$

解析：由题得，$\sin 2x-1\geqslant 2a(\cos x-\sin x-2)$，因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\cos x-\sin x-2<0$，即$2a\geqslant\frac{\sin 2x-1}{\cos x-\sin x-2}$，又$\frac{\sin 2x-1}{\cos x-\sin x-2}=\frac{(\sin x-\cos x)^2}{2+\sin x-\cos x}$，令$t=\sin x-\cos x(t\in[-1,1])$，则$\frac{(\sin x-\cos x)^2}{2+\sin x-\cos x}=\frac{t^2}{2+t}=(2+t)+\frac{4}{2+t}-4\in[0,1]$，则$2a\geqslant 1$，即$a\geqslant\frac{1}{2}$，故选B.

答案：B

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第13～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22～23题为选考题，考生根据要求作答。

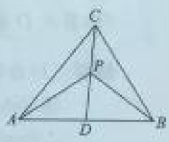
二、填空题：本题共4小题，每小题5分。

13. 已知$3^a=2$，则$\log_6 4-\log_6 2=$__________.（利用a表示）

解析：因为$3^a=2$，所以$\log_3 2=a$，所以$\log_6 4-\log_6 2=\log_6 2=\frac{\lg 2}{\lg 2+\lg 3}=\frac{\frac{\lg 2}{\lg 3}}{1+\frac{\lg 2}{\lg 3}}=\frac{a}{1+a}$.

答案：$\frac{a}{1+a}$

14. 如图，点P在$\triangle ABC$的内部，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，且$3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{CA}$，则$\triangle BCD$与$\triangle APD$的面积的比值为__________.



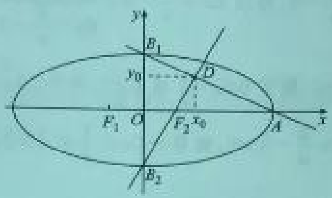
解析：由$3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{CA}$，得$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{CP}$。因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，所以$D$为$AB$的中点，所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PD}$，所以$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PD}$，即$P$是$CD$的中点，所以$S_{\triangle APD}=S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$，即$\triangle BCD$与$\triangle APD$的面积的比值为2.

答案：2

15. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，上、下顶点分别为$B_1,B_2$，右顶点为$A$，直线$AB_1$与$B_2F_2$交于点$D$，且$\frac{|B_1D|}{|AD|}=\frac{1}{2}$，则椭圆$C$的离心率为__________.

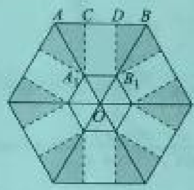
解析：设$D(x_0,y_0)$，由$\frac{|B_1D|}{|AD|}=\frac{1}{2}$，利用三角形相似，可得$\frac{|AD|}{|AB_1|}=\frac{a-x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{2}{3}$，解得$x_0=\frac{1}{3}a$，$y_0=$

$\frac{2}{3}b$. 又直线 B_1F_2 的方程为 $\frac{x}{c}-\frac{y}{b}=1$，把点 $D\left(\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}b\right)$ 代入，可得 $\frac{\frac{1}{3}a}{c}-\frac{\frac{2}{3}b}{b}=1$，∴$\frac{a}{3c}=\frac{5}{3}$，∴$a=5c$，∴$e=\frac{1}{5}$.



答案：$\frac{1}{5}$

16. 如图是正六边形，把图形的阴影部分剪掉，剩余部分做成一个正六棱柱容器(无盖)，已知正六边形的边长是 15 cm，则无盖容器的容积的最大值是________ cm^3.



解析：设容器的底面边长为 x cm，高为 h cm，容积为 V cm^3. 由题意可知 $A_1B_1=CD=x$，$CA_1=DB_1=h$，则 $AC=DB=\frac{1}{2}(AB-x)=\frac{1}{2}(15-x)$，$h=AC\cdot\tan 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}(15-x)$，故 $V(x)=Sh=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}(15-x)=\frac{9}{4}x^2(15-x)$，$0<x<15$. 则 $V'(x)=\frac{9}{4}(30x-3x^2)$，令 $V'(x)=0$，得 $x=10$. 当 $x\in(0,10)$ 时，$V'(x)>0$；当 $x\in(10,15)$ 时，$V'(x)<0$，所以 $V(x)$ 在区间 $(0,10)$ 上单调递增，在区间 $(10,15)$ 上单调递减，所以当且仅当 $x=10$ 时，$V(x)$ 取得最大值为 1125.

答案：1125

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 12 分)

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $(a^2+b^2-c^2)\cdot(a\cos B+b\cos A)=abc$.

(1)求角 C；

(2)若点 D 在 BC 上，且 $BC=2AC=2\sqrt{3}$，$\sin\angle BAD=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，求 CD 的长.

解析：(1)由 $(a^2+b^2-c^2)\cdot(a\cos B+b\cos A)=abc$ 及余弦定理，

得 $2ab\cos C\cdot(a\cos B+b\cos A)=abc$，

∴$2\cos C\cdot(a\cos B+b\cos A)=c$.(2 分)

由正弦定理，得 $2\cos C\cdot(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，

∴$2\cos C\cdot\sin(A+B)=\sin C$.(4 分)

∴$2\cos C\cdot\sin C=\sin C$.

∵$C\in(0,\pi)$，∴$\sin C\neq 0$，

∴$\cos C=\frac{1}{2}$，

∴$C=\frac{\pi}{3}$.(6 分)

(2)由(1)知 $C=\frac{\pi}{3}$，

则 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C}=\sqrt{3+12-2\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}=3$，

$\therefore\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{9+12-3}{2\times3\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

可得 $B=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore\angle BAC=\frac{\pi}{2}$.(8 分)

$\because\sin\angle BAD=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore\cos\angle BAD=\sqrt{1-\sin^2\angle BAD}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

则 $\sin\angle DAC=\cos\angle BAD=\frac{\sqrt{21}}{7}$.(10 分)

在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理，可得 $AD=\frac{BD\sin B}{\sin\angle BAD}$，

在$\triangle ADC$ 中，由正弦定理，可得 $AD=\frac{CD\sin C}{\sin\angle DAC}$，

$\therefore\frac{(2\sqrt{3}-CD)\times\frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=\frac{CD\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{7}}$，

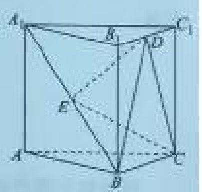
解得 $CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.(12 分)

18.(本小题满分 12 分)

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 是四边形 AA_1B_1B 的对角线的交点，D 是 B_1C_1 的中点.

(1)证明：$DE//$平面 ACC_1A_1；

(2)设正三棱柱的底面边长为 a，若三棱锥 $D-EBC$ 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{24}a^2$，求正三棱柱的高.



解析：(1)如图，连接 AB_1，AC_1，

$\because E$ 是四边形 AA_1B_1B 的对角线的交点，

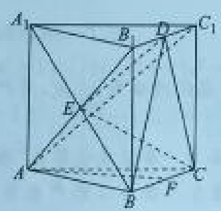
$\therefore E$ 为 AB_1，A_1B 的中点.(1 分)

又 D 是 B_1C_1 的中点，

$\therefore DE//AC_1$.(3 分)

$\because DE\not\subset$平面 ACC_1A_1，$AC_1\subset$平面 ACC_1A_1，(5 分)

$\therefore DE//$平面 ACC_1A_1.(6 分)



(2)$\because E$ 是 A_1B 的中点，

$\therefore$点 E 到平面 BCC_1B_1 的距离是点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离的一半.(8 分)

如图，作 $AF\perp BC$ 交 BC 于点 F，

由正三棱柱的性质可知，$AF\perp$ 平面 BCC_1B_1.

$\because AB=a$，

$\therefore$ 三棱锥 $E-BCD$ 的高为 $\frac{1}{2}AF=\frac{\sqrt{3}}{4}AB=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

设正三棱柱的高为 h，

则 $S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}\times a\times h=\frac{ah}{2}$，(10 分)

$\therefore V_{D-EBC}=V_{E-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle DBC}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{\sqrt{3}}{24}a^2h=\frac{\sqrt{3}}{24}a^2$，

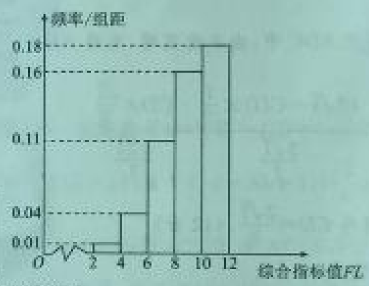
可得 $h=1$，

$\therefore$ 正三棱柱的高是 1.(12 分)

19.(本小题满分 12 分)

近几年，我国鲜切花产业得到了快速发展，相关部门制定了鲜切花产品行业等级标准，统一使用综合指标值 FL 进行衡量，如下表所示. 云南某花卉生产基地准备购进一套新型的生产线，以提高产品质量，现进行设备试用，对加工出的鲜切花产品的相关数据进行统计，整理结果如直方图所示.

综合指标值 FL	[2,6]	(6,10]	(10,12]
产品等级	合格品	一等品	优等品



(1)估计该新型生产线加工的产品为一等品或优等品的概率；

(2)若从产品等级为一等品和优等品的产品中，用分层抽样的方法选出 5 个产品，再从这 5 个产品中选出 2 个做生产流程调查，求这 2 个产品都为一等品的概率；

(3)根据该花卉生产基地的生产记录，产品的销售率(某等级产品的销量与产量的比值)及产品售价如下表：

	合格品	一等品	优等品
销售率	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$
单件售价	12 元	16 元	20 元

因为鲜切花产品的保鲜特点，未售出的产品统一按原售价的 50% 全部处理完. 该花卉生产基地要购进新的生产线需要满足两个条件：

①综合指标值的平均数不小于 8；

②单件平均利润不低于 4 元.

若该新型生产线加工的鲜切花单件产品的成本为 10 元，月产量 10 万件. 如果按照原有的销售策略，分析该新型生产线是否达到认购条件.

解析：(1)记"该新型生产线加工的产品为一等品或优等品"为事件 M，

由频率分布直方图可知，该新型生产线加工的产品为一等品或优等品的频率为 $(0.11+0.16+0.18)\times 2=0.9$，

故事件 M 的概率的估计值 $P(M)=0.9$.(3 分)

(2)由题意可知，选出的5个产品中，一等品有3个，记为 a,b,c；优等品有2个，记为 A,B.

从这5个产品中选出2个，选法有 $(a,b),(a,c),(a,A),(a,B),(b,c),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B),(A,B)$，共10种，

其中2个都为一等品的选法有 $(a,b),(a,c),(b,c)$，共3种，

故所求概率 $P=\frac{3}{10}$.(6分)

(3)由直方图可知，综合指标值的平均数

$\bar{x}=(3\times0.01+5\times0.04+7\times0.11+9\times0.16+11\times0.18)\times2=8.84$.

因为 $8.84>8$，故满足条件①.

由频率分布直方图可知，该新型生产线加工的产品为合格品，一等品，优等品的概率估计值分别为0.1,0.54,0.36，

故10万件产品中，合格品，一等品，优等品的件数的估计值分别为1万件，5.4万件，3.6万件.

合格品的销售总利润为 $1\times\frac{2}{5}\times(12-10)-1\times\frac{3}{5}\times(10-6)=-1.6$ 万元；

一等品的销售总利润为 $5.4\times\frac{2}{3}\times(16-10)-5.4\times\frac{1}{3}\times(10-8)=18$ 万元；

优等品的销售总利润为 $3.6\times\frac{8}{9}\times(20-10)=32$ 万元，

故10万件产品的单件平均利润的估计值为 $(-1.6+18+32)\div10=4.84$ 元，

满足条件②.

综上所述，该新型生产线可以达到认购条件.(12分)

20.(本小题满分12分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线 C 上一点，过点 P 作 $PM\perp l$，垂足为 M，$\triangle PMF$ 为等边三角形，面积为 $4\sqrt{3}$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)若点 H 是圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与抛物线 C 的一个交点，点 $A(-1,0)$，当 $\frac{|HA|}{|HF|}$ 取得最大值时，求此时圆 O 的方程.

解析：(1)设等边 $\triangle PMF$ 的边长为 a，

$\because$ 等边 $\triangle PMF$ 的面积为 $4\sqrt{3}$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=4\sqrt{3}$，解得 $a=4$，

$\therefore|MF|=4$.(2分)

$\because\angle MFO=60^\circ$，$\therefore p=|MF|\cdot\cos60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$，

$\therefore$ 抛物线 C 的方程是 $y^2=4x$.(6分)

(2)设点 H 的坐标为 $(4t^2,4t)$，

$\because$ 抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，$A(-1,0)$，

$\therefore|HF|^2=(4t^2-1)^2+16t^2=(4t^2+1)^2$，$|HA|^2=(4t^2+1)^2+16t^2$，(8分)

$\therefore\left(\frac{|HA|}{|HF|}\right)^2=\frac{(4t^2+1)^2+16t^2}{(4t^2+1)^2}=1+\frac{16t^2}{(4t^2+1)^2}\leqslant1+\frac{16t^2}{(4t)^2}=1+1=2$，当且仅当 $t=\pm\frac{1}{2}$ 时取等号，

即当 $\frac{|HA|}{|HF|}$ 最大时，$t=\pm\frac{1}{2}$，

此时 $H(1,2)$ 或 $H(1,-2)$，(11分)

把点 H 的坐标代入圆的方程，可得圆 O 的方程为 $x^2+y^2=5$.(12分)

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$（e 是自然对数的底数）.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若函数 $T(x)=f(x)-x^2$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求证：$e^{x_1}+e^{x_2}\geqslant 4$.

解析：(1)由题得，$f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

∴$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无减区间；(2 分)

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=e^x-a=0$，

得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$时，$f'(x)<0$；$x\in(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

∴$f(x)$的单调递增区间是$(\ln a,+\infty)$，单调递减区间是$(-\infty,\ln a)$.(4 分)

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无减区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$的单调递增区间是$(\ln a,+\infty)$，单调递减区间是$(-\infty,\ln a)$.(5 分)

(2)根据已知，可得 $T(x)=f(x)-x^2=e^x-ax-x^2$，

则 $T'(x)=e^x-a-2x$，

∵$T(x)$有两个极值点 x_1,x_2，

∴x_1,x_2 是方程 $e^x-2x=a$ 的两个解.

令 $g(x)=e^x-2x$，则 $g'(x)=e^x-2$，

∴当 $x\in(-\infty,\ln 2)$时，$g'(x)<0$，

当 $x\in(\ln 2,+\infty)$时，$g'(x)>0$，

∴当 $x=\ln 2$ 时，$g(x)$取得最小值 $g(\ln 2)=2-2\ln 2$.

∴$a>2-2\ln 2$.(8 分)

∴$x_1<\ln 2<x_2$，且 $g(x_1)=g(x_2)=a$，

∴$2\ln 2-x_1>\ln 2$，

∴$g(2\ln 2-x_1)-a=g(2\ln 2-x_1)-g(x_1)=\frac{4}{e^{x_1}}-2(2\ln 2-x_1)-e^{x_1}+2x_1=\frac{4}{e^{x_1}}+4x_1-e^{x_1}-4\ln 2$.

令 $h(x)=\frac{4}{e^x}+4x-e^x-4\ln 2$，

则 $h'(x)=-\frac{4}{e^x}+4-e^x\leqslant -2\sqrt{\frac{4}{e^x}\cdot e^x}+4=0$（当且仅当 $x=\ln 2$ 时取等号），

∴$h(x)$单调递减.(10 分)

∴$h(x_1)=\frac{4}{e^{x_1}}+4x_1-e^{x_1}-4\ln 2>h(\ln 2)=0$，

∴$g(2\ln 2-x_1)>a$，

即 $g(2\ln 2-x_1)>g(x_2)$，

又 $g(x)$在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，

∴$2\ln 2-x_1>x_2$，

即 $x_1+x_2<2\ln 2$.

∵$x_1\neq x_2$，

∴$e^{x_1}+e^{x_2}>2\sqrt{e^{x_1+x_2}}$ 恒成立，

又 $e^{x_1+x_2}<e^{2\ln 2}=4$，

∴$e^{x_1}+e^{x_2}\geqslant 4$.(12 分)

请考生在第22、23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分10分）选修4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），以该直角坐标系的原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2)求直线 l 被曲线 C 截得的弦长是多少？

解析：(1)将 $\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 消去参数 t，

得直线 l 的普通方程为 $x-y-1=0$.（2分）

∵曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$，

即 $\rho^2\cos^2\theta+4\rho\cos\theta-\rho^2=0$，

∴曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$.（5分）

(2)联立 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x-y-1=0, \end{cases}$

得 $x^2-6x+1=0$，$\Delta=36-4=32>0$，

设直线 l 与曲线 C 交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$，

故直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+1)\times(36-4)}=8$.（10分）

23.（本小题满分10分）选修4—5：不等式选讲

设函数 $f(x)=|3x+6|-2$.

(1)求不等式 $f(x)<2x+4$ 的解集；

(2)若不等式 $f(x)+3|x-1|\geqslant a$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解析：(1)由 $f(x)<2x+4$，得 $|3x+6|-2<2x+4$，得 $|3x+6|<2x+6$，（1分）

则 $\begin{cases} 3x+6\geqslant 0, \\ 3x+6<2x+6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x+6<0, \\ -(3x+6)<2x+6, \end{cases}$（3分）

解得 $-2\leqslant x<0$ 或 $-\frac{12}{5}<x<-2$.（4分）

∴ $-\frac{12}{5}<x<0$.

∴不等式 $f(x)<2x+4$ 的解集为 $\left(-\frac{12}{5},0\right)$.（5分）

(2)不等式 $f(x)+3|x-1|\geqslant a$ 即为 $|3x+6|-2+3|x-1|\geqslant a$，

即 $|3x+6|-2+|3x-3|\geqslant a$.（6分）

而 $|3x+6|-2+|3x-3|\geqslant|(3x+6)-(3x-3)|-2=7$，

当且仅当 $(3x+6)(3x-3)\leqslant 0$ 时等号成立.（8分）

∴要使不等式 $f(x)+3|x-1|\geqslant a$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，需满足 $a\leqslant 7$.

∴实数 a 的取值范围是 $(-\infty,7]$.（10分）

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注