2016年全国高中数学联合竞赛一试试题（A卷）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设实数a满足$a<9a^3-11a<|a|$，则a的取值范围是________.

2. 设复数z, w满足$|z|=3$，$\left(z+\overline{w}\right)\left(\overline{z}-w\right)=7+4i$，其中i是虚数单位，$\overline{z}, \overline{w}$分别表示$z, w$的共轭复数，则$\left(z+2\overline{w}\right)\left(\overline{z}-2w\right)$的模为________.

3. 正实数u, v, w均不等于1，若$\log_u vw+\log_v w=5$，$\log_v u+\log_w v=3$，则$\log_w u$的值为________.

4. 袋子A中装有2张10元纸币和3张1元纸币，袋子B中装有4张5元纸币和3张1元纸币．现随机从两个袋子中各取出两张纸币，则A中剩下的纸币面值之和大于B中剩下的纸币面值之和的概率为________.

5. 设P为一圆锥的顶点，A, B, C是其底面圆周上的三点，满足$\angle ABC=90^\circ$，M为AP的中点．若$AB=1, AC=2, AP=\sqrt{2}$，则二面角$M-BC-A$的大小为________.

6. 设函数$f(x)=\sin^4\frac{kx}{10}+\cos^4\frac{kx}{10}$，其中$k$是一个正整数．若对任意实数$a$，均有$\{f(x)\,|\,a<x<a+1\}=\{f(x)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$，则$k$的最小值为________.

7. 双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，左、右焦点分别为F_1、F_2．过点F_2作一直线与双曲线C的右半支交于点P, Q，使得$\angle F_1PQ=90^\circ$，则ΔF_1PQ的内切圆半径是________.

8. 设a_1, a_2, a_3, a_4是1, 2, $\cdots$, 100中的4个互不相同的数，满足

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2,$$

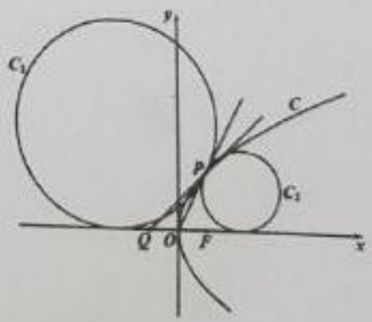
则这样的有序数组(a_1, a_2, a_3, a_4)的个数为________.

二、解答题：本大题共3小题，共56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分）在ΔABC中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$．求$\sin C$的最大值.

10.（本题满分20分）已知$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，$f(1)=1$，且对任意$x<0$，均有$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=xf(x)$．求$f(1)f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{98}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{50}\right)f\left(\frac{1}{51}\right)$的值.

11.（本题满分20分）如图所示，在平面直角坐标系xOy中，F是x轴正半轴上的一个动点．以F为焦点、O为顶点作抛物线C．设P是第一象限内C上的一点，Q是x轴负半轴上一点，使得PQ为C的切线，且$|PQ|=2$．圆C_1, C_2均与直线OP相切于点P，且均与x轴相切．求点F的坐标，使圆C_1与C_2的面积之和取到最小值.



2016年全国高中数学联合竞赛加试试题（A卷）

一、（本题满分40分）设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2016}$ 满足 $9a_i>11a_{i+1}^2\ (i=1,2,\cdots,2015)$．求 $(a_1-a_2^2)\cdot(a_2-a_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{2015}-a_{2016}^2)\cdot(a_{2016}-a_1^2)$ 的最大值．

二、（本题满分 40 分） 如图所示，在△ABC中，X,Y 是直线 BC 上两点（X,B,C,Y 顺次排列），使得

$$BX\cdot AC=CY\cdot AB.$$

设△ACX，△ABY 的外心分别为 O_1,O_2，直线 O_1O_2 与 AB,AC 分别交于点 U,V．

证明：△AUV 是等腰三角形．

（解题时请将图画在答卷纸上）

三、（本题满分 50 分） 给定空间中 10 个点，其中任意四点不在一个平面上．将某些点之间用线段相连，若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形，试确定所连线段数目的最大值．

四、（本题满分 50 分）设 p 与 $p+2$ 均是素数，$p>3$．数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\left\lceil\frac{pa_{n-1}}{n}\right\rceil$，$n=2,3,\cdots$．这里 $\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数．

证明：对 $n=3,4,\cdots,p-1$ 均有 $n\mid pa_{n-1}+1$ 成立．

自主招生 www.zizzs.com

后续将会第一时间在自主招生在线微信公众号公布本次联赛试题和答案，敬请期待！更多数学竞赛相关资讯和消息，请关注自主招生在线官方微信，新鲜、独家、有料！

自主招生在线（微信 ID：zizzsw）

扫一扫　关注官方微信